R

Math. P. 512

m

Geschenk d. Vf.

Math. Part.

pag. 274.

R

Belehrungen
in
Geometrie,

zur Nachhülfe

für Praktiker

in Feld- und Bau-Messungen

bestimmt

von

C. L. Schübler.

Stuttgart, bei J. B. Metzler,
1813.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

In jeder Kunst, in jedem Gewerb kann man die Forderung an die sogenannten Praktiker, welche eine Wissenschaft ausüben, ohne ihre Gründe genau zu kennen, zu hoch spannen. So kann man auch die ausübenden Geometer mit allzuvieler Theorie in Anspruch nehmen, und mit Fragen in Verlegenheit sezen, zu welchen ihnen die Vorkenntnisse fehlen. Allein es giebt doch allerdings auch mäsige Ansprüche, welchen sich kein praktischer Geometer entziehen soll, noch darf.

Es giebt eine Reihe von Vorstellungen und Begriffen, welche keinem Geometer unbekannt seyn sollten, und deren Entbehrung schimpflich ist. Viele lernen dieses erst durch Verlegenheiten, in welche große Beschränktheit der nöthigen Einsichten in diesem Fach, früh oder spät gewiß führt, zu ihrem Schaden, oft nach einem Ablauf geraumer Zeit erst einsehen, und bedauren alsdenn, oft allzuspät, daß sie den Gebrechen ihres ehmals erhaltenen Unterrichts nicht früher

durch Aufmerksamkeit auf bessere Lehren, bei günstigen Anlässen, abgeholfen haben.

Diese Blätter sind dazu bestimmt, daß Geometer, welche ehedem in der Theorie (mit oder ohne ihre Schuld) versäumt worden sind, ohne große Anstrengung das nachholen können, was ihnen vor dem entgangen seyn mag.

Praktiker wissen oft vielerlei, und viel gutes; selbst Bruchstüke von Bedeutung aus der Theorie; — aber was sie wissen, ist meistens wenig geordnet; sie sind nicht geübt, sich gehörig darüber auszudrücken, und die Darstellungsart des Calkuls, wie dieser unsern Zeiten, und den Fortschritten unserer Cultur angemessen ist, ist ihnen fremd *). Sie sollten hierüber nicht gleichgültig seyn, da die neueren Königl. und Fürstlichen

---

*) Die amtliche Function, Geometer zu examiniren, welche mir schon seit mehreren Jahren obliegt, hat mich veranlaßt, viele Beobachtungen hierüber zu sammeln; wodurch eben der gröste Theil der Abschnitte meines Buchs selbst erzeugt worden ist. Ich habe durch diese Prüfungen die Gebrechen in den Schlüssen der Praktiker, und ihre Dürftigkeit kennen lernen. — Uebrigens enthalten meine Blätter allerdings auch vieles, was nicht in einem solchen Examen zur Sprache kommt; und es würde übertrieben seyn, den gemeinen Feldmesser durch alle Fragen dieses Buchs in Verlegenheit zu sezen.

Vorschriften, in allen Provinzen Deutschlands, den Geometern die Pflicht auflegen, die Bezeichnungs-Weise der neuern Lehrer in Arithmetik und Geometrie folgsam aufzunehmen.

Die vorliegende Schrift kann nicht alles nachholen. Es wird in derselben vorausgesezt, daß man schon mit einigen Kenntnissen z. B. der Decimal-Rechnung, und der Haupt-Lehre von geometrischen Proportionen vertraut sei *).

Wer aber doch dafür hält, daß einiges, zumal in den lezten Abschnitten, zu tief in die Theorie hinein führe, oder umständlicher erläutert seyn sollte, dem erbiete ich mich zu mündlichen oder schriftlichen Erklärungen und Auseinandersezungen der schwierigen Stellen. Ich seze deshalb am Ende meine nähere Adresse bei.

Uebrigens halte ich es beinahe für un-

---

*) Anfängern seien hiemit die Schriften des Hrn. Präceptors Böbels in Stuttg. empfolen. Seine Verzeichnung geometr. Figuren (1799 herausg.) und seine prakt. Feldmeßk. (1809.) Auch ein paar Schriften von mir, schon 1795 und 1799 zu Heilbronn gedrukt: Gründe der Rechenkunst, und Vortheile der Decimal-Rechnung .. wage ich noch hier beizusezen.

möglich, den grössern Theil der Praktiker hierüber zufrieden zu stellen, und dem Vorwurf zu entgehen, man belade sie zu viel mit Säzen, welche in der Ausübung selten vorkommen, oder man trage ihnen diese allzukünstlich, auch wohl nicht umständlich-faßlich genug vor. — Die Vorträge dieser Blätter waren aus guten Gründen auf wenige Bogen beschränkt; ob sich mit der Zahl derselben nun eine ausführlichere Behandlung und grössere Umständlichkeit vertragen hätte, mag dem Urtheile einsichtiger Kenner anheim gestellt bleiben.

C. L. Schübler
Ober-Regierungs-Rath.
(wohnend zu Stuttgart
C. Nr. 372.)

Inhalt.

Seite.

I.) Ueber die Summation der Brüche von ungleichen Nennern. 1 — 6.

II.) Ueberzeugende Gründe von dem Regel de Tri Saz. 6 — 12.

III.) Ueber die Schrekbilder der Buchstaben=Rechnung. 12 — 16.

IV.) Ueber das Verfahren, bestimmte Stüke von Dreiecken so abzuschneiden, daß die Theilungslinie mit der Grundlinie parallel lauffe. 26 — 36.

V.) Ueber die Bestimmung der Höhen-Theile in einem Dreieck, wenn mehrere Parallelen mit der Grundlinie gegeben sind, und ein bestimmter Innhalt verlangt wird. 37 — 42.

VI.) Aufgabe, ein Feldstück von einer gewißen Größe zu einem andern hinzuzumessen; oder es von einem andern hinweg zu messen. 42 — 57.

VII.) Ueber die Vergleichung der Flächen, welche man erhält, wenn in gleichschenklichten Dreiecken die Basis und eine der gleichen Seiten quadrirt werden. 57 — 64.

Seite.

VIII.) Belehrung, wie man die Sehne eines Kreises finden könne, ohne den Kreisbogen zu messen, ohne Winkel-Instrumente, und ohne Trigonometrie 2) Wie man jeden Punkt, der zwischen 2 Parallelen liegt, . . . finden und bestimmen könne. 64 — 75.

IX) Ueber Zirkel-Rechnung (Cyklometrie). 76 — 89.

X.) Ueber das Verhalten runder Stämme, und vierecktigter, welche daraus gehauen worden, gegeneinander; und die Berechnung des Abfalls. 90 — 100.

XI.) Anweisung, den Cubik = Innhalt von Kugeln und Kugel = Abschnitten, auf verschiedenen Wegen zu finden. 101 — 110.

XII.) Vergleichung elliptischer Flächen mit Kreisflächen, und Anweisung, die ersten zu berechnen. 111 — 121.

XIII.) Gewölb = Rechnungen bei ungleicher Dicke an der Streb = Mauer und am Schluß-Stein. 122 — 130.

XIV.) Ueber die Prüfung verschiedener Krümmungen bei Gewölben, Brückenbögen . . . . wenn man ungewiß ist, welche krumme Linie vorhanden sei. 131 — 141.

XV.) Ueber die Berechnung der Flächen unter gedrükten Kreisbögen. 142 — 156.

I.

Ueber die Summation der Brüche von ungleichen Nennern.

1.

Wie addirt man Brüche, welche ungleiche Nenner haben, zusammen? z. B. $\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{7}$.

Antwort. Man multiplicirt die Nenner z. B. 4. 7 = 28. Das Product giebt den Nenner eines neuen Bruchs.

Alsdenn multiplicirt man jeden Zäler durch den Nenner des andern Bruchs. Die Summe dieser 2 Faktoren giebt den Zäler des neuen Bruchs, d. i. den Zäler zu dem Nenner oder über den Nenner 28.

Also (3. 7 + 2. 4)

oder (21 + 8.) = 29 ist der neue Zäler; und $\frac{29}{28}$ ist ganze Bruch, welcher die Summe der 2 gegebenen Brüche vorstellt, und selbst diese Summe ist.

2.

Warum verfährt man so? was rechtfertigt diese Behandlungs-Art?

Antwort. Der Mensch kann nichts zusammenzälen, als was gleicher Art ist, als was

aus gleichen Einheiten besteht. Wenn ein Duzend ungleichgroße Gläser beisammen auf einem Tische stehen, so kann man diese nicht zusammenzälen, (in Beziehung auf ihren Gehalt). Wenn das einen Schoppen enthält, das andere $\frac{2}{3}$ Schoppen, das dritte $\frac{5}{8}$ Schoppen, das vierte einen halben Schoppen — so sind da verschiedene Einheiten; man kann nicht fortzälen. Wenn die Gläser gleich gros sind, oder gleichen Innhalt haben, so kann man es.

Wenn auf 2 vorgelegten Stäben Zolle eingezeichnet sind, Pariser und Nürnberger, also grössere und kleinere, so kann man nicht von den Zollen des einen Stabs auf die des andern fortzählen. Die Einheiten sind ungleich. Nur gleichartiges kann man zusammen zälen.

So kann man $\frac{3}{12}$ und $\frac{5}{12}$ gewiß zusammen zälen; aber nicht $\frac{3}{12}$ und $\frac{5}{11}$. Eben so auch kann man von $\frac{4}{28}$ auf $\frac{21}{28}$ ohne Schwierigkeit fortzälen; es sind gleichartige Theile vorhanden.

So oft aber Brüche mit ungleichen Nennern vorkommen, so sind ungleichartige Theile vorhanden, und es findet keine Fortzälung statt.

Um sich also zu helfen, und diese Fortzälung doch wirklich möglich zu machen (zum Beisp. bei $\frac{2}{7}$ auf $\frac{3}{4}$) muß man die vorgelegten Theile unterabtheilen, und diese Unterabtheilung so geschikt machen, daß unter beede Brüche gleiche unterabgetheilte Einheiten, als Nenner, zu stehen kom-

men. Dazu gelangt man, wenn man bei jeder der 7 Einheiten (in $\frac{2}{7}$) 4 kleinere Einheiten sich denkt, als Unterabtheilung; folglich 7 mal 4 = 28 und bei $\frac{3}{4}$ in dem Nenner 4 sich 7 mal 4 denkt, d. h. ebenfalls 28.

Weil aber der Werth der einzelnen Brüche selbst bleiben (nicht im Innern erhöht noch vermindert werden) soll, so muß man eben den Factor, welchen der Nenner erhält, auch in den Zäler sezen, und daher so denken:

$$\frac{2}{7} \text{ ist} = \frac{2 \cdot 4}{7 \cdot 4} \text{ d. h. } \frac{8}{28}$$

$$\text{und } \frac{3}{4} \text{ ist} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 7} \text{ d. h. } \frac{21}{28}$$

Und nun kann man ganz ohne Anstoß fortzälen: bei $\frac{2}{7}$ sind 8 kleine Einheiten, jede $\frac{1}{28}$ vorhanden: $= \frac{8}{28}$. Und bei $\frac{3}{4}$ sind 21 kleine Einheiten, jede $\frac{1}{28}$ vorhanden. Also zusammen sind (8 + 21) oder 29 solche Einheiten vorganden. So hat man zusammen addirt, und übersieht die richtige Summe mit völliger Zuverläßigkeit.

Was nun hier umständlich angegeben ist, das bringt man in Kürze, gleichsam mechanisch, durch die 3 Multiplicationen, zu Stande, welche das Geschäft der

Reduction zweier Brüche

unter einen Nenner ganz und gar ausmachen. Die eine Multiplication geht blos die zwei Nenner an; die 2 andern die Zäler und Nenner; wel-

ches man auch die Multiplication übers Kreuz oder in die Queere nennt. Was man hiemit vornimmt, geht darum wohl an, und ist selbst darum rechtlich, weil

„jeder Bruch, in welchem der Zäler eben den „Factor erhält, welchen der Nenner bekommt, „eben seinen Gehalt, (wahren Valor) behält."

Diesen Elementar-Saz sieht doch wohl jeder ein, der dessen gewiß ist, daß z. B. ($\frac{4}{5}$ $\frac{3}{3}$) so viel als ($\frac{4}{5}$) 1 und zugleich auch $= \frac{12}{15}$ ist.

Eben so auch $\frac{4}{5} \cdot \frac{12}{12}$ ist $= \frac{4}{5} \cdot 1$ und auch $\frac{48}{60}$

Wer $\frac{4}{5}$ eines Guldens besizt, besizt gewiß auch $\frac{48}{60}$ eines Guldens! — Ein $\frac{1}{5}$tel eines Guldens wird ein Dreibäzner genannt; $\frac{1}{60}$ eines Guldens wird ein Kreuzer genannt; das sind größere und kleinere Einheiten. Wenn sie gemischt liegen, kann man von Stück zu Stück nicht fortzählen; man muß vorher die grösseren Einheiten zu kleinern machen, d. h. sie in Gedanken so umändern, daß allen Theilen einerlei Gehalt und einerlei Benennung zukommen. Alsdenn sind gleichartige Theile vorhanden, und man kann die kleinere Summe gegen die grössere schäzen, auch zusammen zählen, oder auch von einander abziehen.

3.

Warum kommt dann bei Decimal-Brüchen kein solches Geschäft (der Reduction unter einen Nenner) vor?

Antwort. Weil Decimal-Brüche schon an

und für sich unter einen Nenner reducirte Brüche selbst sind. Man denke sich, zum Anfang nur alle Decimal-Brüche, als Brüche mit dem Nenner 100, und lege vor sich: zum Beispiel

$\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{3}$

$=$ 0,25 und 0,33 . .

Das ist $\frac{25}{100}$ und $\frac{33}{100}$.

Bei dem lezten Bruch soll zwar der Zäler, genau genommen, $33\frac{1}{3}$ heissen; man läßt aber diesen Anhang in den meisten Fällen, wo $\frac{1}{3}$ von einem Hunderttheilchen, nicht zu achten, ganz weg. Nun kann man doch gewiß zusammen zählen (0,25 + 0,33) sind 0,58 oder $\frac{58}{100}$.

Noch ein Beispiel $\frac{3}{4} + \frac{4}{19} = (0,75 + 0,21.)$
$= 0,96$
weil $\frac{75}{100} + \frac{21}{100} = \frac{96}{100}$ beträgt.

Auch hier ist $\frac{21}{100}$ nicht ganz $\frac{4}{19}$; es sollte $21\frac{1}{19}$ im Zäler stehen. Aber man achtet den Anhang nicht, weil der Uberschuß über 21 nicht einmal $\frac{1}{1000}$ beträgt. (Denn $\frac{4}{19}$ ist genauer berechnet $=$ 0,21052; wo die Nulle in der 3ten Decimal-Stelle deutlich zu erkennen giebt, daß der Ueberschuß über 0,21 weniger als $\frac{1}{1000}$ betrage.)

Noch mehr, (und noch befriedigender für Anfänger) erhellet alles dieses, wenn man alle Brüche sich als Brüche mit dem Nenner 1000 denkt z. B. $\frac{1}{8}$ und $\frac{6}{25}$ ist $=$

0,125 + 0,240 = 0,365

weil $\frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$ ist; und

$\frac{240}{1000} = \frac{6}{25}$. Die Summe beider Brüchen beträgt $\frac{365}{1000}$; wo alles vollendet da steht; und in dem Zäler nichts fehlt.

Ferner: $(\frac{3}{8} + \frac{27}{49})$ ist

$$(0{,}375 + 0{,}551) = 0{,}926$$

d. h. $(\frac{375}{1000} + \frac{551}{1000})$ giebt $(\frac{926}{1000})$ wo in der Schärfe des Calkuls auch nicht einmal $\frac{1}{10000}$ fehlt, wie man deutlich sieht, wenn man den Bruch $\frac{26}{47}$ einzeln in Decimalen bis auf $\frac{1}{100000}$ ausdrükt, wo er $= 0{,}551010$ ist.

II.

Ueberzeugende Gründe von dem Regel de Tri Saz.

I.

Auf welche Säze gründet sich das mechanische Verfahren der Regel de Tri, da man zwei Zalen multiplicirt und mit einer dritten in das Product dividirt, um die Antwort auf vorgelegte Fragen zu erhalten?

Antwort. Bei jeder Regel de Tri sind eigentlich 2 geometrische gleiche Verhältnisse vorhanden, welche eine geometrische Proportion von 4 Gliedern ausmachen, wobei man den Gedanken hat: „Zwei Zalen verhalten sich gegen einander

„ganz so, wie zwei andre (grössere, oder kleinere) Zalen.

2.

Wie kann diese Behauptung durch ein Beispiel deutlich gemacht und bewährt werden?

Antwort. Wenn jemand sagte: 4 junge Bäume oder Pflanzen-Sezlinge kosten 28 kr. was kosten 9 solche Sezlinge? so wird, nach mechanischer Art, 9 mit 28 multiplicirt, und das Product (9. 28) oder 252 mit 4 dividirt. Was heraus kommt, nennt man den Quotienten, und erkennt ihn als die Zal an, welche die Frage beantwortet: (63). Die Zal erhält man zwar richtig; aber den Grund des Verfahrens sieht man nicht ein, wenn man nicht mit folgender Vorstellungsart vertraut ist. Man muß bei dieser Aufgabe so denken:

Die Zal von 4 Sezlingen verhält sich zu der Zal von 9 Sezlingen, wie der Preis von 28 Kreuzern zu dem Preiß, den man sucht, nemlich zu dem Preiß für die genannte 9 Sezlinge. Dieser noch unbekannte Preis ist gewiß eine Zahl von Kreuzern, welche man einstweilen x nennen mag.

Der Saz in 4 Gliedern wird nun so gestellt:

4	:	zu 9	=	wie 28	:	zu x
Sezling	:	zu Sezling	=	wie Kreuzer	:	zu Kreuzer

Offenbar vergleichet man man hiernach
gezählte Sezlinge
mit gezählten Kreuzern

und die lezte Zal; welche für und anstatt des Zeichens x herauskommen muß, (63) muß gegen die Zal oder mit der Zal von 28 Kreuzern sich eben so vergleichen lassen, wie die Zahl 9 gegen die Zal 4; d. h. die gesuchte Zal 63 muß gegen 28 eben dieselbe Verhältniß haben, wie die Zal der Sezlinge 9 gegen die der Sezlinge 4 hat. Das ist eben die Gleichheit der Verhältnisse, welche vorhanden seyn muß, wenn eine geometrische Proportion vorhanden seyn soll.

3.

Hat man keinen kurzen Ausdruk mit welchem man die Vergleichungszal von je zwei Gliedern benennt?

Antwort. Ja, man nennt sie den Exponenten; und derselbe wird erhalten, wenn man das erste Glied in das 2te dividirt, und eben so das 3te Glied in das 4te.

Der Exponent muß in beeden Fällen gleich seyn; $\frac{9}{4}$ muß $\frac{63}{28}$ gleich seyn; d. h. 4 muß so oft in der Zal 9 liegen, als 28 in der Zal 63, nemlich $2\frac{1}{4}$ mal. Träfe dieses nicht zu, so würde keine Proportion vorhanden seyn. Man seze die Glieder, wie folgt, hin.

$$4 : 9 = 28 : 63$$
$$(2\tfrac{1}{4}) \qquad\qquad (2\tfrac{1}{4})$$

und spreche dabei so,

4 zweimal genommen ist 8; und noch $\frac{1}{4}$ von 4 ist 1; zusammen 9; das ist das zweite Glied des Proportions-Sazes; und eben so 28 zweimal genommen ist 56, und noch $\frac{1}{4}$ von 28 ist 7; zusam-

men 63; das ist das 4te Glied des Proportions-Sazes. So sieht man 2 ganz gleiche Vergleichungs-Größen, d. h. die Gleichheit der Verhältnisse ganz deutlich vor seinen Augen.

4.

Das ist wohl alles richtig, und trift zu, wenn man das 4te Glied schon kennt, und einsezen kann; allein wie findet man durch diesen Exponent das noch unbekannt zu denkende 4te Glied, x?

Antwort. Man muß so denken:

$$\underset{(2\frac{1}{4})}{4 : 9} = \underset{(2\frac{1}{4})}{28 : x}$$

Die Zal ($2\frac{1}{4}$) ist allemal gegeben, oder als bekannt anzunehmen, weil sie so viel als $\frac{9}{4}$ ist, und die Zalen 9 und 4 in der Aufgabe selbst schon ausgesprochen, und genannt sind. Also hat man sogleich ($2\frac{1}{4}$). Diese Zal benüze man bei dem 3ten Glied, und frage sich dabei: „wie viel beträgt (28) mit ($2\frac{1}{4}$) multiplicirt, oder $2\frac{1}{4}$ mal genommen? das läßt sich bald abzählen, und bestimmt angeben. Was nun so herauskommt, ist eben die Zal des lezten bisher unbekannt gewesenen Glieds. Das ist eben die Zal x, immer, und hier = 63.

5.

Auf diese Weise wird aber anders in der Operation verfahren, als bei der gewöhnlichen Weise der Regel de Tri, wo man nur 2 Factoren multiplicirt, und mit der 3ten in das Product dividirt, ohne

die Berechnung eines Exponenten dabei vorzunehmen. Läßt sich dann deutlich nachweisen und darthun, daß das mechanische Verfahren, zu eben der Größe führen müsse, wie das mit dem Exponenten?

Antwort. Ja; dieses läßt sich darthun. Man hat aber zu dem Ende die Vorstellung so zu nehmen:

$4 : 9 \quad = \text{wie } 28 \quad : \quad 63.$

läßt sich so schreiben:

$4 : (4 \cdot 2\frac{1}{4}) = 28 \quad : \quad (28 \cdot 2\frac{1}{4})$

Dieses ist aus dem vorigen deutlich genug; nun kann man leicht wahrnehmen, daß das Product der mittlern Glieder, als 3 Faktoren betrachtet,

$= (4) \cdot (2\frac{1}{4}) \cdot (28)$ sei.

Ganz ebendiese Faktoren zeigen sich, wenn man das 1ste und 4te Glied gleichmäsig zusammen stellt; nemlich

$(4) \cdot (28)\ (2\frac{1}{4})$

Niemand wird in Abrede stellen, daß

$(4) \cdot (2\frac{1}{4}) \cdot (28)$

soviel, als

$(4) \cdot (28) \cdot (2\frac{1}{4})$ sei.

Dann wenn gleich $(2\frac{1}{4})$ in der untern Zeile hier zulezt steht, und in der obern in der Mitte, so ändert dieses doch im Produkt nichts; (so wenig als 3 mal 4 = 12; von 4 mal 3 verschieden ist).

Das Product der 3. Factoren ist jedesmal der einfachen ganzen Zal 252 gleich. Man behalte aber die 3 Factoren nur bei, und seze die Glei-

chung vor seinen Augen hin:

$(4)\ (2\tfrac{1}{4})\ (28) = (4).\ (28).\ (2\tfrac{1}{4}).$

Nun denke man an eine wohl bekannte arithmetische Wahrheit:

„wenn ein Product von 2 Factoren durch den „einen Factor dividirt wird, so bleibt der an„dere, (als Quotient) allemal übrig.

Z. B. $\frac{30}{3}$ ist $\frac{3.\ 10}{3} = 10$

oder $\frac{39}{3}$ ist $= \frac{3.\ 13}{3} = 13$

Eben dieses Gesez hat statt, wenn 3 Factoren vorhanden sind; und man mit einem derselben in das Product der dreien dividirt. Die 2 andern bleiben.

Dieses werde nun hier mit dem Factor 4 vorgenommen; man seze so:

$\frac{(4).\ (28)\ (2\frac{1}{4})}{4.}$. Der Quotient ist $(28)\ (2\tfrac{1}{4})$ und dieser besteht nun blos noch aus 2 Factoren, von welchen der eine die Zal 28, der andere der Exponent $(2\tfrac{1}{4})$ ist. Das Product dieser 2 Factoren beträgt 63. Und 63 ist nun eben die Zal, welche man vermittelst des gewöhnlichen Verfahrens, welches $(\frac{9\ .\ 28}{4})$ ist, bekommt.

Das Verfahren mit Anwendung des Exponenten führt daher den Rechner auf ebendieselbe Größe hinaus; und dieses sollte eben gezeigt werden.

Das Verfahren auf mechanische Weise ist freilich kürzer. Aber man sieht bei demselben den Grund nicht ein, daß das, was herauskommt, die richtige Zal sei; dagegen die Darstellung mit den Exponenten die Operation rechtfertiget, und den Beweiß der Richtigkeit des Verfahrens selbst darlegt, so daß man einsieht, warum keine andere Zal herauskommen könne, als die des 4ten Glieds der vorhandenen Proportion.

III.

Ueber die Schrekbilder der Buchstaben-Rechnung.

1.

So manche praktische Geometer habe ich schon gesprochen, welche Buchstaben-Rechnung entweder gar nicht kennen, oder ihre Brauchbarkeit in der Anwendung in Abrede stellen; und auf Erfahrung sich berufen, daß man dieselben wohl entrathen könne. Sollte diese Erfahrung gar keinen Glauben verdienen?

Antwort. Man kann in allen Künsten manche bestimmten Hülfsmittel entrathen, und doch zu seinem Zweck gelangen. Es giebt der Wege

viel, um etwas auszuführen. So kann man auch wohl der sogenannten Buchstaben-Rechnung in der Geometrie entbehren, wie dann die Alten mehrere Jahrhunderte derselben entbehrt haben; und dennoch richtige Feldvermessungen zu Stande bringen. Allein man entbehrt damit vieler Vortheile, man schadet sich selbst, indem man seinem Eigensinn folgt, und von dem Nuzen nichts hören will, welchen die Anwendung der allgemeinen Zeichen durch Buchstaben zuverläßig gewährt.

2.

Dieser Nuzen wird eben bestritten, oder doch sehr bezweifelt; und, wenn je etwas davon zugestanden wird, behauptet, die Zeit und Mühe, welche man anwenden müsse, um die Kunst der Buchstaben-Rechnung recht zu lernen, sei allzugros, als daß gemeine Geometer sich damit abgeben könnten. Sollte dem nicht also seyn?

Antwort. Blos aus Vorurtheil und übertriebener Anhänglichkeit an altes hergebrachtes Verfahren, wird also geurtheilt. Es gehört nicht große Mühe dazu, um einzusehen, daß die Art und Weise der Buchstabenbehandlung gar nicht überfein, oder allzusubtil, noch beschwerlich verwickelt sei. Auch ist es gar keine Kunst, welche tief-gelehrte Kenntnisse, die nur Professoren vorbehalten wären, voraussezte. Die lateinische, griechische, französische Sprache auch nur erträglich, (was man oft halb nennt) zu lernen, erfordert

10 und 20 mal mehr Zeit, als die Erlernung der Buchstaben-Rechnung.

3.

Es ist doch aber kaum in Abrede zu stellen, daß blos der Gedanke: „man müsse mit Buchstaben rechnen „lernen, und eine Reihe von Brüchen, in welchen „die Zäler und Nenner nur Buchstaben sind, verste-„hen lernen“ — etwas abschreckendes mit sich führe; „und daß es verzeihlich sei, wenn viele bei der bloßen Ansicht dieser Zeichen als von unbegreiflichen Dingen, sich von denselben abkehren, oder zurükwenden?

Antwort. Dieses kommt fast blos davon her, daß man sich nur durch den ersten Anblik abschrecken, auch, daß man sich durch den Ausdruck: Buchstaben-Rechnung irre führen läßt, und unbegreiflich große Schwierigkeiten ahndet. Dieser Ausdruck ist nicht der schicklichste, und es wäre zu wünschen, daß er niemals in unsere Sprache aufgenommen worden wäre, indem in der That nicht eigentlich mit Buchstaben gerechnet wird. Indessen sind andre ehmals mehr üblich gewesenen Ausdrücke, wie der: Algebra speciosa, oder der höhern Hebkunst u.d.m. ebenfalls für sich nicht verständlich, und ohne Erläuterung gar nicht dazu förderlich, dieser Wissenschaft bei Ungelehrten Eingang zu verschaffen.

Eine Belehrung, durch welche die vorzüglichsten Vorurtheile, welche sich hiebei allemal entgegen stellen, beseitiget werden müssen, ist jedesmal

hiebei nothwendig. Diese sezt aber keine gelehrte, oder akademischen Studien voraus. Sie kann mit ganz einfachen wohlverständlichen Säzen beginnen, welche niemand übersteigen, oder übersubtil nennen dürfte.

4.

Welche Säze könnte man dann wohl zum Eingang wählen, um gemeinen Arithmetikern in der bemerkten Hinsicht die rechte Fassung beizubringen.

Antwort. Das ist in vielen Schriften schon gezeigt, und wohl ausgeführt worden. Einige Haupt-Säze lassen sich wohl so darstellen:

Jeder Zahlen-Rechner weis, daß ein Bruch, dessen Zäler und Nenner eine und ebendieselbe Zahl ist, nicht mehr im Werth als = 1 betrage. So ist $\frac{3}{3} = 1$ und $\frac{13}{13} = 1$, so gut, als $\frac{215}{215}$ nicht mehr als 1 ist. Man kann also allgemein die Bezeichnung hinstellen $\frac{a}{a}$ ist = 1, oder $\frac{n}{n}$ ist = 1. Man denkt dabei: a kann jede Zal bedeuten; wenn dieselbe im Zäler steht, und im Nenner (unten) eben dieselbe wieder vorkommt, so kann der Gehalt des Bruchs $\frac{a}{a}$ kein anderer als = 1 seyn*). Es findet gar kein anderer Gedanke statt,

*) Wenn ein Stab in 12 Theilchen abgetheilt ist, so machen 12 Zwölf-Theilchen, die Einheit aus: $\frac{12}{12} = 1$. Statt 12 kann jede Zal eintreten: 13,

a soll nur eine Größe vorstellen; und $\frac{a}{a}$ das Gesez ausdrücken, die allgemeine Erfahrung, den vernunftgemäßen Saz: Zwei Zalen so gestellt, in dieser Verbindung gedacht, sind Eins, oder machen eine Einheit aus.

Wendet man ein: „dieses ist keine eigentliche Rechnung; das ist nur eine allgemeine Bezeichnung!" — so begegne ich dem, der diesen Einwand vorbringt, mit gar keiner Widerrede; er hat ganz recht; im Ernst recht. Es ist keine Gefahr, daß man dieses zugestehe. Man nehme nur noch folgende Betrachtung dazu:

Einmal 12 ist 12; oder (1). 12 ist = 12;
Einmal 30 ist 30; oder (1). 30 ist = 30.

So kann man jede Zahl in 2 Factoren schreiben:

(1.) (45) oder (45). (1) ist = 45
(1.) (91) oder (91.) 1 ist = 91.

Eben so muß nun auch

$\left(\frac{a}{a}\right)$ (91) oder (91). $\left(\frac{a}{a}\right)$ = 91 seyn.

weil $\left(\frac{a}{a}\right)$ nicht mehr als = 1 ist.

Eben so ist daher auch 12 $\left(\frac{a}{a}\right)$ = 12

weil (12). (1) eben so viel ist.

14, 15. . . a, oder n, der Ausspruch bleibt, wenn die gewählte Größe oben und unten (in den Bruch eingesezt wird.

Die nehmliche Größe ist natürlich $= 12 \left(\frac{3}{3}\right)$ oder $12 \left(\frac{13}{13}\right)$ oder $12. \left(\frac{n}{n}\right)$.

Ist man von der Richtigkeit dieser Darstellung überzeugt, so fasse man noch folgenden Gedanken:

12 drei ($\frac{1}{3}$) mal ist so viel *), als

12 mal 3, dividirt durch 3; oder

$$12. \left(\frac{3}{3}\right) \text{ ist } = \frac{12. (\text{mal})\ 3}{3} = 12.$$

$$\text{und } 12. \left(\frac{13}{13}\right) \text{ ist so viel als } \frac{12.\ 13}{13} = 12$$

$$\text{oder } 15. \left(\frac{6}{6}\right) \text{ ist } = \frac{15.\ 6.}{6} \text{ d. h. } 15.$$

Mit Worten: „das Product zweier Factoren, „dividirt durch den einen derselben, giebt zum „Quotienten den andern.

Diesen Saz suche man sich recht deutlich vorzustellen. An seiner Richtigkeit läßt sich gar nicht zweifeln.

So wird also auch $12. \left(\frac{a}{a}\right) = \frac{12.\ a}{a} = 12$

$$15. \left(\frac{a}{a}\right) = \frac{15.\ a}{a} = 15!$$

---

*) Hier kommt man auf einen der Hauptpunkte in Pestalozzis Zahlen-Lehre. In seinen Vorträgen kommt hin und her gewendet in 100 Beispielen vor:
Der 3te Theil von 3 mal 12 ist 1 mal 12.
Der n te Theil von n mal 12, ist 1 mal 12
sagt eben dasselbe. Dem Anfänger ist blos der Ausdruk fremd, wenn er ihn zum erstenmal hört.

seyn; wo (15. a) das Product zweier Factoren vorstellt, und unten im Nenner, steht wiederum einer dieser 2 Factoren a nun als Divisor. Der Quotient ist der andere Factor: 15.

Eben so ist $17. \left(\frac{n}{n}\right) = \frac{17. n}{n} = 17.$

Man gehe nicht weiter, als bis man sich ganz von der Richtigkeit dieser Behauptung, und von der ganz gewissen Zuläßigkeit dieser Bezeichnungs-Art überzeugt habe. Ist man aber hiezu gelangt, so gehe man nun noch folgenden Schritt vorwärts.

In den 3 lezten Beispielen haben die genannten Zahlen geheißen: 12; 15; 17;

Man hätte jede andere dafür einsezen können; als auch wohl b, oder c, oder . . z. Geht dieses an, so geht es dann auch an, daß man seze:

$$b. \left(\frac{a}{a}\right) \text{ ist } = \frac{b. a}{a} = b$$

oder $c. \left(\frac{a}{a}\right)$ ist $= \frac{c. a}{a} = c$

oder $z. \left(\frac{a}{a}\right)$ ist $= \frac{z. a}{a} = z$

und dabei läßt sich gar nichts anders denken, als der Saz: Ein Product zweier Factoren (z. a) dividirt durch den einen a, giebt zum Quotienten den andern z; und es kann nichts anders hervorkommen, als eben diese Größe z, wenn z mit a wirklich im Zäler oder im Dividend gestanden.

5.

Hieran ist allerdings nichts zu zweifeln. Allein auch hier läßt sich wohl der schon oben berührte Einwand vorbringen, daß dieses keine eigentliche Rechnung, sondern blos eine allgemeine Bezeichnung eines Sazes, einer allgemein-geltenden arithmetischen Wahrheit sei?

Antwort Ich bestreite diesen Einwurf gar nicht Allerdings drükt diese Formel oder Gleichung $\frac{z. a.}{a} = z$ nur einen allgemeinen Saz aus. Es ist freilich keine eigentliche Rechnung, wie man mit Zalen rechnet; es ist nur eine kurze Darstellung einer allgemein-anerkannten Wahrnehmung eines arithmetischen nicht zu bezweifelnden Gesezes, welches immer statt hat, wenn zwei Factoren vorhanden sind, und einer von ihnen zur Division des Products selbst angewendet wird

Hiedurch wird eben der die Algebra verschmähende Geometer schon zu der Einsicht gebracht, daß er sich unter Buchstaben-Rechnung bisher etwas gedacht habe, was man sich bei dem Wort gar nicht denken soll, und daß die Behandlung der Buchstaben etwas viel einfacheres sei, als er bisher geglaubt habe. — Und hiemit ist nun schon ein Sieg über ein tiefsizendes Vorurtheil gewonnen.

6.

Wenn dieses auch von jedem Arithmetiker und Geometer zugestanden werden möchte, so dürfte doch wohl, z mal von dem lezten, die Frage nicht ausbleiben, was dann nur mit einer solchen Formel sich weiter ausrichten lasse?

Antwort. Mit einer oder zwei Formeln, für sich betrachtet, ist freilich wenig anzufangen. Aber die Anwendung ist dennoch sehr mannigfaltig. Nur läßt sich dieses nicht in einer Viertelstunde, ohne tiefer einzugehen, und ohne Nebeneinanderstellung mehrerer Fälle, gründlich darthun. Indessen mag der Geometer doch folgende Beispiele in Erwägung nehmen:

Er denke sich zwei ähnliche Dreiecke, etwa wie in Fig. V.| AGB und ADE sind. Die Katheten verhalten sich darinn, wie die Grundlinien

AG : zu AD = wie GB : zu DE

z. B. 7 : 8 = 3 : $3\frac{3}{7}$

Das lezte Glied, die Basis DE, läßt sich allerdings denken, als $= \frac{(8.\ 3)}{7}$, das Product der mittlern Glieder, dividirt durch das erste. Die Zalen der 3 Glieder, (die Längen dieser Linie AG, AD, GB) mögen heissen wie sie wollen, so bleibt es immer bei diesem Gesez für das 4te Glied.

Wenn sie also a, b, c, heissen, so muß das

4te Glied $= \frac{b.\ c}{a}$ heissen, bei Annahme der Proportion:

$$a : zu\ b = wie\ c\ zu\ \left(\frac{b.\ c}{a}\right)$$

Das Product (b. c) giebt den Dividend ab, und a den Divisor. Daran zweifelt wohl niemand. Als eine Zal-Größe heiße diese 4te Größe, mit einem Zeichen angegeben, = d; so ist dann

$$\frac{b.\ c}{a} = d$$

Weil ähnliche Dreiecke unendlich oft vorkommen, und das ganze Geschäft des Geometers sich gleichsam um diese Aehnlichkeit, und um Berechnung solcher Proportionen dreht, so liegt nothwendig dem grösten Theil seiner Rechnungen die Formel $\frac{b.\ c}{a} = d$

zum Grund, eben weil er sich immer mit einem Saz, wie AG : AD = GB : DE ist,

oder $a : b = c : \left(d = \frac{b\ c}{a}\right)$

abzugeben hat. Es dürfte ihm also nicht schwer werden, sich bei jeder Formel, welche so wie $\left(\frac{b.\ c}{a}\right)$ aussieht, eine der Linien in 2 ähnlichen Dreiecken zu denken, wie DE eine ist. Wenn er also einen Buchstaben-Saz, wie $\frac{n.\ m}{p}$ oder $\frac{g.\ l}{f}$

sähe, so würde er sich die Proportionen denken;

$$p : n = m : \left(\frac{n.\,m}{p}\right)$$

$$f : g = l : \left(\frac{g.\,l}{f}\right)$$

und es könnte ihm wohl nicht schwer werden, allemal bei dem lezten Glied eine Linie zu denken, welche in eines von 2 ähnlichen rechtwinklichten Dreiecken, als Kathetus, oder als Basis, oder als Hypotenuse gehörte.

Ein geringes Nachdenken wird ihn aber darauf führen, daß die Formel nicht blos auf recht winklichte Dreiecke eingeschränkt seyn könne. Er denke ein schiefwinklichtes ungleichseitiges Dreieck; und ziehe mit dessen Grundlinie eine Parallele, so wird er ein kleineres ähnliches Dreieck erhalten, und auch in diesem je 2 Seiten mit einander vergleichen können, so daß auch dabei die Proportion gelten muß:

$$a : b = c : d$$

oder $f : g = l : v$

wo gewiß $\frac{b.\,c}{a} = d$

und $\frac{g.\,l.}{f} = v$

eine der Linien, wie DE, seyn muß.

Die Absicht dieses Vortrags geht blos dahin, dem Geometer begreiflich zu machen,

„wie unter einer Buchstaben-Formel sich
„eine geometrische Linie denken lasse."

Damit ihm diese Vorstellungs-Art geläufiger werde, so nehme er noch Folgendes in sich auf:

Er weiß aus den ersten Gesezen des Kreises, und der in Kreisen beschriebenen Sehnen, und auf den Diameter gefällten Lothen, daß das Product der 2 Segmente eines Durchmessers, auf deren Endpunkt ein Loth von der Peripherie gefällt ist, so gros, als das Quadrat dieses Loths sei.

Z. B. in der erst benüzten Figur ist

$$(DG \cdot AG) = BG^2.$$

Dieses ist ein allgemeiner Saz, der bekannt genug ist. Wenn der Punkt G gegen G^I rükt, so ist

$$(DG^I \cdot AG^I) = B^IG^{I\,2}$$

Man nenne die 2 Segmente kurz, x und z; das Loth aber y; so ist gewiß

$$(x \cdot z) = y^2$$

Der Diameter besteht also aus den 2 Stücken $x + z$. Man nenne ihn anstatt AD in Kürze $= a$; und denke also $(x + z) = a$

Wenn man den Punkt G in Gedanken hinauf rükt, so wird die Linie DG grösser, und das andere Stück AG nothwendig kleiner. Also wenn x wächst, so nimmt z ab; das ist nothwendig; die Summe dieser zwei veränderlichen Größen bleibt immer $= a$. Der Diameter bleibt immer unveränderlich; das Perpendikel y aber ändert

sich, so wie andre und wieder andre Segmente (oder Stücke) auf dem Diameter angenommen werden.

Nun sehe man das eine der 2 Segmente AG oder z als eine Differenz an, als AD — DG). oder als (a — x)

Ein Blik in die Figur führt zu der gewissen Ueberzeugung, daß man unter dem Ausdruck

$$x. \ (a. - x) = y^2$$

nichts anders, als unten

$$(x. \ z) = y^2$$

verstehen könne. Der Ausdruk x (a — x) ist darum vorzüglich, weil in demselben der Diameter a als die beständige Größe vorkommt, und man nun sich blos mit der einen veränderlichen, x, beschäftigen kann. Man sieht, daß die Größe des Loths y blos von der Zunahme und Abnahme der Linie D G, oder x, abhängt, indem a bei jeder Aenderung bleibt, als eine und ebendieselbe Länge, oder Linien-Größe.

Wer hierüber etwas nachdenkt, kommt wohl auf leichtem Weg zur der Einsicht, daß die Gleichung

$$x. \ (a - x) = y^2$$

ein allgemeines Gesez darstelle, das in jedem Kreis statt finde, in so ferne man nemlich

„einen Kreis-Diameter, und auf demselben mehrere Lothe sich denkt, grössere und kleinere."

Bei allen kann man sprechen: „Hier ist jederzeit

„ein Rechteck, dessen Fläche der Fläche eines Qua-
„drats gleich ist = yy. Die eine Seite des
„Rechtecks ist x. Die andere Seite ist (a — x)
oder z. Die Buchstaben-Formel stellt also ein
allgemein statt findendes Gesez dar. Der Geome-
ter, welcher eine ähnliche gebildete Formel irgend-
wo zu sehen bekommt. Z. B.

$$t. (a - t) = v^2$$

kann nun schon etwas hiebei denken, und sich eine
Figur (ja wohl 2 Figuren) dabei vorstellen, indem
er die Vorstellung festhält: „der Größe t möge wohl
ein Stük eines Kreis-Diameters a entsprechen, der
Größe (a — t) das andre; und der Größe v^2
das Quadrat eines Loths v, welches als senkrechte
Linie beim Zusammentreffen der 2 Segmente auf-
gerichtet wäre.

Ganz damit verbunden ist der Gedanke: die-
ses Loth ist die geometrische Mittel-Proportionale
zwischen den 2 Segmenten:

$$x : y = y : (a - x)$$

oder $t : v = v : (a - t)$

Man sieht ohne Mühe, wie die Säze zusammen-
menhängen. —

Ich verfolge sie nun nicht weiter; es ist mir ge-
nug, wenn aus dem, was von mir angeführt wor-
den, nur so viel hervorgeht, daß sich, nach allem
diesem leicht einsehen lasse, welchen Sinn Buch-
staben-Formeln haben. Der Arithmetiker begreift
nun doch wohl, welchen Gedanken er mit den 4
Bezeichnungen zu verbinden habe:

$$\text{I)}\ \frac{a}{a} = 1 \qquad \text{II)}\ \frac{b.\,a}{a} = b$$

$$\text{III)}\ \frac{b.\,c.}{a} = d;\ \text{und}\ \ \text{IV)}\ x.\,(a-x) = y^2$$

Das Geheimnisvolle verschwindet; und das unbegreifliche läßt sich wohl durchsehen, wenn man sich nur entschliessen mag, die Betrachtungen zu wiederholen, welche ich über jeden dieser 4 Säze angestellt habe.

IV.

Ueber das Verfahren, bestimmte Stücke von Dreiecken so abzuschneiden, daß die Theilungslinie mit der Grundlinie parallel lauffen soll.

1te Frage.

Wenn man ein Dreieck A B C in 2 Helften theilen soll, so daß die Theilungslinie von der Spize A auslauffen darf; so ist das Verfahren allgemein bekannt, und ganz leicht. (Man halbirt nur die Grundlinie) — aber wenn die Theilungslinie mit der Grundlinie parallel lauffen, und das △ AMN = ½ ABC seyn soll (als Fläche) wie hat man

zu verfahren, um die Länge dieser Scheide-Linie zu finden)

(Fig. I.)

Antwort. Die Regel diese Linie MN in Rechnung (oder als eine Zal) zu finden, ist folgende:

Man nimmt die Zal der gemessenen Grundlinie BC; und dividirt sie durch die Quadratwurzel von 2, oder durch $\sqrt{2} = 1{,}41421$, wofür in Praxi gar oft nur 1,414 genommen werden darf ($1 \frac{414}{1000}$)

In Kürze: MN ist $= \frac{BC}{\sqrt{2}}$ oder $\frac{BC}{1{,}414}$.

2te Frage.

Auf welche Säze gründet sich dieses hiemit angezeigte mechanische Verfahren, die rechte Theilungs-Linie zu finden?

Antwort. Es gründet sich darauf, daß in allen gerad linigten ähnlichen Dreiecken, die Innhalte der Dreiecke gegen einander sich verhalten, wie die Quadrate der ähnlich liegenden Seiten oder Höhen in diesen ähnlichen Dreiecken.

Soll nun die Fläche des Dreiecks AMN halb so gros seyn, als die des $\triangle$ ABC seyn; so muß die Proportion gelten

ABC : AMN = wie 2 : zu 1

und auch

$BC^2 : MN^2$ = wie 2 : zu 1

Man stelle die Glieder wie folgt:

$$2 : 1 = BC^2 : MN^2$$

damit man recht leicht vor sich sehe:

$$\frac{1 . BC^2}{2} \text{ ist } = MN^2$$

Mit Worten: das Quadrat der Grundlinie durch 2 dividirt, ist dem Quadrat der gesuchten Seite (MN) gleich.

Ist dem so, so folgt aus

$$\frac{1 . BC^2}{2} = MN^2$$

$$\text{auch } \sqrt{\left(\frac{BC^2}{2}\right)} = \sqrt{(MN^2)} \text{ d. i. } MN$$

Denn die Gleichung bleibt doch gewiß eben dieselbe, wenn man aus beiden Größen rechts u. links die Quadrat-Wurzel auszieht.

Nun ist $\sqrt{\left(\frac{1 . B^2}{2}\right)}$ so viel, als $\frac{\sqrt{B^2}}{\sqrt{2}}$, weil die $\sqrt{}$ Wurzel aus 1. nichts ändert; aber $\sqrt{B^2}$ ist eben so viel, als $\sqrt{(B . B)}$ oder als B für sich; so wie $\sqrt{(12)^2} = 12$ ist; und $\sqrt{(14)^2} = 14$ so viel als $\sqrt{(196)} = \sqrt{(14 . 14)}$ Aus dem Nenner läßt sich die Quadratwurzel nicht so bequem ausziehen, weil die Zal 2 keine Quadrat-Zal ist; und man den Betrag von 2 nur in Näherung sezen kann.

3te Frage.

Diesem nach verhalten sich nun die 2 Längen der Li-

nien BC und MN gegen einander nicht wie 2 zu 1, sondern wie $\sqrt{2}$ zu 1. Allein, wie verhalten sich dann nun diese 2 Größen in Zalen gegen einander? Kann man dieses nicht auf eine ganz faßliche Weise recht begreiflich machen?

Antwort. Da die Quadrat-Wurzel der Zal 2 sich niemals vollkommen ausrechnen läßt, so begnügt man sich mit einer Näherung

$\sqrt{2}$ ist = 1,414213

wo die Ziffern nach dem Strichlein Decimalen sind, und ausgesprochen werden können

$\frac{4}{10}$ $\frac{1}{100}$ $\frac{4}{1000}$ $\frac{2}{10000}$ u. s. f.

In gemeinem Gebrauch ist es oft genug, daß man 1, 414 seze. Die 2 Grundlinien müssen also gegen einander sich verhalten,

wie 1 : zu 1, 414.

4.

Kann man dieses Verhältniß nicht noch leichter, und und so viel möglich in ganzen Zalen aussprechen?

Antwort. Man kann die beeden Verhältnis-Glieder mit 10 multipliciren, oder auch mit 100, oder auch mit 1000; und wenn man dieses vorgenommen hat, so kann man sprechen:

Die 2 Grundlinien müssen sich verhalten

wie 10 : zu 14, 14 (oder 14 $\frac{14}{100}$)

oder wie 100 : zu 141, 4 (oder 141 $\frac{4}{10}$)

oder wie 1000 : zu 1414

wobei man sich also vorzustellen hätte, die kleine Grundlinie bestünde aus 1000 gleichen Theilen, und die Größere aus 141 dergleichen, mit dem Ueberschuß von $\frac{4}{10}$.

5.

Das geht wohl ganz gut an, wenn die Basis des großen Dreiecks eben aus 2, oder aus der Quadratwurzel von 2 besteht; wie aber, wenn die Basis in einem vorkommenden Fall aus der Zal 18 bestünde? (nehmlich Längen-Schuh oder Längen-Zollen) wie findet man da in Zahlen die Länge der kleinern Basis?

Antwort. Man denke sich die Proportion: $\sqrt{2}$: zu 1 = wie 18 : zu $\frac{18}{\sqrt{2}}$ und berechnet nun das lezte Glied, indem man 18 durch 1,414 dividirt, oder $\frac{180}{14,14}$ oder $\frac{1800}{141,4}$ oder $\frac{18000}{1414}$ sich denkt. So sieht man in der lezten Gestalt blos ganze Zalen vor sich; den Dividend 18000; und den Divisor 1414. Dafür kann man auch $\frac{9000}{707}$ in der Rechnung anwenden.

Die Proportion aber

$$\sqrt{2} : 1 = 18 : \frac{18}{\sqrt{2}}$$

$$\text{oder} \ldots\ldots = 18 : \frac{18}{1,414}$$

ist darum gegründet, weil der Haupt-Gedanke dahin geht:

das große Dreieck verhält sich zum kleinern, wie das Quadrat von 18 zum Quadrat der kleinsten Seite; also wie

$$2 : 1 = 18^2 : \frac{18^2}{2}$$

das lezte Glied ist gleich . $\frac{(18) \cdot (18)}{2}$

d. h. = (9 . 18) oder 162.

Also 2 : 1 = 324 : 162

Aber, wenn das Quadrat der kleinern Seite 162 ist, so ist die Länge selbst die Quadrat-Wurzel dieser Größe.

Diese ist = ($9 \cdot \sqrt{2}$) indem 162 = (81 . 2) ist und daher $\sqrt{162} = (\sqrt{81}) \cdot (\sqrt{2}) = 9 \cdot \sqrt{2}$ gedacht werden muß. *).

Nun erwäge man, wenn man die 2 Grundlinien neben einander hinstellt und vergleicht, daß

$$18 : 9 \cdot \sqrt{2}$$

so viel sei, als

$$\frac{18}{9} : \frac{9 \cdot \sqrt{2}}{9}$$

d. h. $2 : \sqrt{2}$

oder gleich $\frac{2}{\sqrt{2}} : 1$

welches eben = ($\sqrt{2}$) : zu 1 ist

---

*) In Decimalen aber ist [9 . (1,414)] = 12,726 d. i. etwas über $12\frac{7}{10}$; doch weniger als $12\frac{3}{4}$.

indem $\frac{2}{\sqrt{2}}$ so viel als $\frac{(\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$ ist

wo $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$ sich hebt.

Wir sind also hiemit auf die Proportion hinaus gekommen:

$18 : \text{zu } 9 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} : \text{zu } 1$

oder wenn man nur die Verhältniß-Glieder umwechselt, auf

$\sqrt{2} : 1 = 18 : 9 \cdot \sqrt{2}$

Diese ist aber ganz eben dieselbe, welche oben (im Eingang der Antwort) als

$\sqrt{2} : 1 = 18 : \frac{18}{\sqrt{2}}$

aufgestellt worden war.

Denn 9mal $\sqrt{2}$ ist soviel, als $\frac{18}{\sqrt{2}}$ weil $\frac{18}{\sqrt{2}}$ sich schreiben läßt: $\frac{9 \cdot 2}{\sqrt{2}}$ d. i. $9\sqrt{2}$, und somit ist die obige Behauptung erwiesen.

Auch ist 18 dividirt durch 1,414 oder 180 durch 14,14 so viel als $9 \cdot \sqrt{2}$, nemlich 12,726.

6.

Giebt es kein Mittel die durch 1,414 (oder $\sqrt{2}$) vorzunehmende Division zu vermeiden, da ja, so oft die Grundlinie als Zal, keine gerade Zal ist, der Nenner ($\sqrt{2}$) sich nicht heben kann? (Z. B. bei $\frac{17}{\sqrt{2}}$)

Antwort. Diese Mittel liegen darinn, daß man sich jederzeit statt des Nenners $(\sqrt{2})$ einen Factor denke, welcher $(\frac{1}{\sqrt{2}})$ sei; und welcher in Decimalen: 0,707 beträgt. Nemlich $\frac{17}{\sqrt{2}}$ ist so viel als das Product der 2 Factoren $(17) . \sqrt{(\frac{1}{2})}$; so wie $\frac{17}{4}$ so viel als $(17) . (\frac{1}{4})$ ist oder $\frac{17}{5} = (17) . (\frac{1}{5})$.

Der Betrag von $\sqrt{(\frac{1}{2})}$ ist aber kein anderer, als die Helfte der Quadratwurzel aus 2; d. h. $= \frac{\sqrt{2}}{2}$; wie auf dem vor. Blatt erläutert, und bewiesen worden ist. Daher hat man dann

$$\frac{1{,}414213}{2} \text{ oder } 0{,}707106 \ldots$$

in Abkürzung aber $= 0{,}7071$ als $= \sqrt{(\frac{1}{2})}$ zu denken. Diese Zal mit der Länge der Grundlinie multiplicirt, z. B. mit 17 giebt jederzeit die Länge der gesuchten Scheide-Linie MN; oder es ist allemal

$$MN = BC . (0{,}7071)$$

Es ist für den praktischen Gebrauch äusserst vorträglich, daß man sich das kleine Einmal-eins dieser Zal merke:

1	0,7071
2	1,4142
3	2,1213
4	2,8284
5	3,5355
6	4,2426
7	4,9497
8	5,6568
9	6,3639
10	7,0710

Anwendung:

Wenn die Grundlinie BC = 17 Ruthen wåre, sezt man:

(17) . (0,7071)

Das Verfahren:

Weil 17 = (10 + 7) ist, so schreibt man:

10 mal ($\surd \frac{1}{2}$) = 7,0710
+ 7 mal = 4,9497
12,0207

Soviel Ruthen hålt die Scheidelinie in der Långe: MN ist = 12,0207 Rth.

Noch ein Beispiel: BC sei = 43 Ruth. Man sezt:

28,284
2,1213
MN = 30,4053

weil auch hier 43 als (40 + 3) gedacht werden muß.

Alles, was bisher von der Grundlinie angeführt worden, gilt auch von der Hôhe der Dreiecke. Man sehe in die Figur II. Hier ist AH die Hôhe des Dreiecks ABC. Die Hôhe für ein Dreieck, welches die halbe Flåche von ABC haben soll, ist = AH . $\surd$ ($\frac{1}{2}$) oder (AH) . (0,7071). Es ist ganz ebendasselbe Verfahren. Die Hôhe A H kann ja auch eben 17 Ruthen lang seyn, oder 43. Der Calkůl ist ganz derselbe.

7.

Alles dieses gilt, wenn ein Dreieck halbirt werden soll; aber wie verfährt man, wenn man eine Parallel für den dritten Theil des Dreiecks verlangt, so daß das △ AMN = $\frac{1}{3}$. ABC seyn sollte?

Antwort. Aus eben denselben Gründen, welche oben für die Helfte angeführt worden, sezt man in diesem Fall BC . $\sqrt{}$ ($\frac{1}{3}$) = MN
oder mit Worten:

Die Grundlinie (als Zal ausgesprochen) werde mit der Quadratwurzel von 3 dividirt; der Quotient giebt die Länge der verlangten Theilungs-Linie an.

Auch hiebei tritt ja nothwendig die Vorstellung ein:

$$\text{BASIS} : \text{zu basis} = \text{wie } \sqrt{3} : 1$$
$$B : b = \sqrt{3} : 1$$

weil das Dreieck ABC gegen das abzuschneidende AMN sich verhalten soll, wie 3 zu 1; und die Quadrate der Grundlinien sich eben so verhalten müssen, (wie die Innhalte). Also:

$$ABC : AMN = 3 : 1$$
$$(\text{BASIS})^2 : (\text{basis})^2 = 3 : 1$$
oder $$B^2 : b^2 = 3 : 1$$

Daher dann auch

$$B : b = \sqrt{3} : 1$$

woraus folgt $$\frac{1 \cdot B}{\sqrt{3}} = b$$

welches eben der Behauptung gemäs ist: Die Basis BC div. durch $\sqrt{3}$ giebt die kleinere Linie b, oder MN.

8.

Ohne Zweifel wird man auch hiebei in der Rechnung einen Factor $\frac{1}{\sqrt{3}}$ anstatt des Nenners jedesmal gebrauchen, und dadurch die Division (mit $\sqrt{3}$) umgehen können?

Antwort. Allerdings ist hier eben derselbe Vortheil, wie bei $\sqrt{(\frac{1}{2})}$ anzuwenden.

Die Zal für $\sqrt{(\frac{1}{3})}$ ist $= \frac{\sqrt{3}}{3}$ in Decimalen $= 0{,}577350$. In sehr vielen Fällen ist es genug, 0,577 als Factor gelten zu lassen.

Bemerk. Hiemit ist gezeigt, wie man die Länge der Linie MN finde; nicht wie hoch sie liege? — Dieses gehört in einen andern Abschnitt. Doch mag folgendes hier sogleich stehen: Man findet den Punkt M auf der Linie AB, (auf dem Feld und in Zeichnung) wenn man die jezt bekannte Linie MN auf die Grundlinie BC legt, und von ihrem Endpunkt M an, (da wo BC — MN ist) eine gerade Linie nach AB hinüber, parallel mit AC zieht. Der Punkt, wo diese Querlinie die Linie AB schneidet, giebt die gesuchte Lage der Linie MN an. — Bestimmungen durch Rechnung (ohne Zeichnen u. Messen) wird man bald in den folg. Blättern erfahren.

V.

Ueber die Bestimmung der Höhen-Theile in einem Dreieck, wenn mehrere Parallelen mit der Grundlinie gegeben sind, und ein bestimmter Innhalt verlangt wird, welcher die Helfte, oder $\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{5}$tel des ganzen Dreiecks seyn soll. Fig. II.

1.

Wenn ein Dreieck mit 9 der Grundlinie gleichlaufenden Linie vorgelegt wird, bei welcher Parallele ist das Dreieck zu suchen, welches eben halb so gros, als das ganze Dreieck wäre?

Antwort. Man denke die Höhe AH des ganzen Dreiecks in 10 Theile getheilt, und zeichne die Ziffern 1. 2. . . . bis 10, so daß 10 in der Basis selbst liege. Die Höhe AH sei = 10 Schuhe. Der richtige Schnitt, welcher das obere Dreieck von der verlangten Helfte darstellt, wird nahe unterhalb der Ziffer 7 durchgehen.

Der Punkt zwischen 7 und 8 läßt sich aber nicht ganz und gar genau mit Zahlen zwischen 7 und 8 angeben.

2.

Warum nicht? wenn man die Distanz zwischen 7 u. 8 in kleinen Unterabtheilugen sich vorstellt, durch

4 oder 8, oder 10 Punkte markirt, so wird doch wohl die Scheidelinie in einen dieser Puncte selbst fallen?

Antwort. Nein; sie wird in keinen dieser Punkte fallen. Auch wenn man noch eine andere Zal, (als 4, 8, 10) annähme, z. B. 16, 20, 30 ... 100 u. s. w. Blos in Näherung kann man die Zal des Scheide-Punkts angeben, und zwar in äusserst weit-gehender Näherung; aber niemals ganz genau in Zalen. Und dieses ist darum nicht möglich, weil die Quadratwurzel der Zal 2 niemals sich in einer vollendeten Zal ausdrücken läßt, sondern nur in Näherung = 1,414213 .. und die Verhältnis-Zalen der 2 Höhen ebenfalls $\sqrt{2} : 1$ sind, so oft man 2 ähnliche Dreiecke sich denkt, von welchen dem einen die doppelt-große Fläche des andern zukommt. Man kann dabei sich jederzeit vorstellen, das kleinere Dreieck stünde in dem grössern, und seine Höhe sei ein Stük der Höhe des grössern. Jedesmal tritt hiebei die Portion ein:

Höhe des grössern : zur Höhe des kleinern = wie $\sqrt{2}$: zu 1

Läßt man nun jede beliebige Zal für die Höhe des grössern eintreten, z. B.

10 : zur Höhe des kleinern = $\sqrt{2} : 1$

so ist die Höhe des kleinen Dreieks = $\frac{10}{\sqrt{2}}$

oder bei der Annahme 16 sei die Höhe, heissen die Glieder der Proportion

16 : zur Höhe des Kl. = $\sqrt{2}$: 1

und so ist die Höhe des Kleinen = $\frac{16}{\sqrt{2}}$

So kommt nun allemal die Größe $\sqrt{2}$ als Divisor vor; oder als Multiplicator, die Größe $\sqrt{\frac{1}{2}}$

Damit sieht man klar, daß niemals eine vollendete ganz bestimmte Zal hervorgehen könne, welche die Höhe des kleinen Dreiecks gäbe.

Denn 10 . $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ist = 7,071068 . .

16 . $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ist = 11,313708 . . . .

Beedes sind blos Zalen der Näherung, wenn man gleich diese Näherung sehr weit, über Million- und Billion-Theilchen hinaus, treiben kann; es sind doch niemals ganz vollendete Zalen, welche so bestimmt wären, wie ganze Zahlen, oder bestimmte Brüche es sind.

Nun ist es doch wohl nicht schwer, daß man einsieht, dieses müsse durchaus in allen Fällen statt haben, wenn die Höhe des grossen Dreiecks eine bestimmte Zal ist, eine ganze, oder eine gebrochene, ein ächter oder unächter Bruch, oder eine aus diesen zusammen gesetzte Zal; wie (z. B.) wenn die Höhe (6 + $\frac{3}{4}$) oder (160 + $\frac{5}{16}$) betrügen.

4.

Eben die Beschaffenheit hat es also auch wohl, wenn das obere Dreieck $\frac{1}{3}$tel des Ganzen ist, oder $\frac{1}{5}$tel

u. s. w. . . . Findet man gar niemals die rechte Höhe in ganzen bestimmten Zalen, (was man gemeine Zalen der Arithmetik nennt) wenn man der Höhe, wie in Fig. II. zehn Unterabtheilungen giebt, oder 20? oder 30? oder 100? . . .

Antwort. Nein, niemals reichen diese gemeine Zahlen zu; weil

$(AH) . \sqrt{(\frac{1}{3})}$ oder $(AH) \sqrt{(\frac{1}{5})}$ u. s. f.

jederzeit ein Product geben, welches sich blos in Näherung, aber niemals vollkommen ausrechnen läßt.

Es läuft gegen die Natur der Irrational-Grössen, eine vollendete Schärfe hiebei zu verlangen.

4.

Da viele Geometer so ungerne mit Irrational-Größen umgehen, (auch, wenn man sie ihnen in Decimalen verwandelt, mittheilt) so möchte es doch gut seyn, daß sie in Kenntnis doch davon gesezt würden, zwischen welche 2 Unterabtheilungen der Höhe die Theilungs-Linie hineinfällt, wenn die Höhe für $\frac{1}{3}$ ABC für $\frac{1}{5}$ ABC, für $\frac{1}{6}$ ABC u. s. f. in einem vorliegenden Fall angenommen wird, und man die Höhe z. B. in 20 Theile, nicht blos in 10 (wie in Fig. II. nur vorkommen) abtheilte?

Antwort. Man kann den Geometern nicht alles ganz und gar gemächlich machen. Die Einsicht davon, daß die Größe

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ in Näherung $= 0,70710$ . .

$\frac{1}{\sqrt{3}}$ in Näherung = 0, 57738 . .

$\frac{1}{\sqrt{5}}$ in Näherung = 0, 44721 . .

betrage, ist bald erworben. Die Multipla dieser Decimalen *) geben allein jedesmal die verlangte Höhe. Diese mag man nun mit dem angenommenen Fall vergleichen, wenn AH = 20 (Schuh oder Ruthen hoch) wäre.

Bei der Halbirung des Dreiecks oder bei $\frac{1}{2}$ ABC fällt die rechte Höhe

zwischen 14 und 15 der Ziffern von 1 bis 20; weil

$\frac{14}{20}$ = 0, 70 } und 0, 7071 . .
$\frac{15}{20}$ = 0, 75 ist } dazwischen fällt.

Bei Annahme der Höhe für $\frac{1}{3}$ ABC fällt die rechte Höhe

zwischen 11 und 12 derselben Ziffern von 1 bis 20, weil

$\frac{11}{20}$ = 0, 55 . } und 0, 57735
$\frac{12}{20}$ = 0, 60 ist } dazwischeu fällt

Bei Annahme der Höhe für $\frac{1}{5}$ ABC fällt die rechte Höhe

zwischen 8 und 9 derselben Ziffern, weil

$\frac{8}{20}$ = 0, 40 } und 0, 44721
$\frac{9}{20}$ = 0, 45 ist } dazwischen fällt.

---

*) Das heißt: jede dieser Zalen multiplicirt mit 2, oder mit 3, 4, 5, — bis 100 u. s. w. fort.

Hiemit ist der Weg wohl sattsam angedeutet, auf welchem alle Fragen dieser Art sich beantworten lassen.

VI.

Aufgabe, ein Feldstük von einer gewissen Grösse zu einem andern hinzumessen, oder es von einem andern hinwegzumessen. Fig. III.

I.

Wenn ein Feld die Figur eines Parallel-Trapezions hat, und man soll an die kleinere parallele Seite ein Feldstük von 7 Quadratruthen hinzumessen; was hat man vorzunehmen, um sich dieser Fläche zu versichern? oder, wenn der Trapezion ABCD hieße, die gehörige Entfernung der 3ten Parallele EF zu finden, durch welche das neue Stük von 7 Quadr. Ruthen begrenzt würde?

Antwort. Es giebt mehrere Wege, diese Aufgabe aufzulösen. Folgender ist einer derselben:

Man muß in Gedanken, oder auf dem Papier, oder auf dem Feld vor allen Dingen das Trapezion ABCD zu einem Dreieck ergänzen: ASB;

wo S den Punkt der Spize bedeutet. Auf dem Feld geschieht dieses, (wenn man keine wirkliche Winkelmessung bei A oder B vornimmt) durch Steckung von Stäben von A nach C, nach E, und von B nach D, nach F. u. s. f.

Man nimmt bald wahr, wo sich die Verlängerungs-Linien von AC und BD aus oben schneiden; und wird also des Punkts S leicht gewiß *).

Nun mißt man die Höhe SH entweder unmittelbar; oder man findet sie vermittelst zweier leichten Hülfs-Linien; man mißt auch besonders noch die Höhe des Trapezions Hh; und erfährt damit Sh, als die Höhe in dem △ SCD.

Da die Parallelen AB und CD als bekannte (gemessene) Linien angenommen werden dürfen, so ist die Berechnung der 2 Flächen der Dreiecke ABS und CDS keinen Schwierigkeiten ausgesezt.

△ ABS ist $= \frac{1}{2}$ (AB . SH)

△ CDS ist $= \frac{1}{2}$ (CD . Sh)

Kennt man aber diese Inhalte, so gelangt man durch einen gar nicht schweren Schluß auf die Bestimmung der Höhe hx, welche die Distanz der Linie EF von CD ist, auf welche alles bei diesen Messungen ankommt.

*) Der leichteste Fall ist der, wenn AC = DB ist, in dem hier das Loth SH in der Mitte der Basis AB liegt.

2.

Es ist doch nicht so sehr deutlich, daß man diese Distanz hx sogleich finden kann, wenn man die genannten Dreiecke kennt! Wie gelangt man recht eigentlich (Schritt vor Schritt) zu der Messung dieser Linie?

Antwort. Man stelle sich die 2 Dreiecke SCD, SEF deutlich vor; sie sind ähnlich, weil EF und CD Parallelen sind Der Innhalt SCD sei = 16 □ Ruthen. Also SEF muß 7 Quad. Rth. weniger haben; △ SEF muß 9 seyn. Wenn man gleich jezt noch nicht weis, wo die Linie EF liegt d. i. in welcher bestimmten Entfernung von CD, so sieht man doch ein,

1) daß über ED ein Dreieck SEF liegen, auch daß diesem EF als Basis zukommen, und dessen Fläche

$$(16 - 7) = 9 \ \square \text{ Ruthen}$$

betragen müsse.

Hat man nun dieses gefaßt, so denke man nur noch an den Lehrsaz: „daß sich 2 ähnliche Dreiecke „wie die Quadrate ihrer Höhe, verhalten"; also hier

$$\triangle \text{SAD} : \triangle \text{SEF} = (\text{Sh})^2 : (\text{Sx})^2$$

Wenn nun die Höhe Sh = 6 Längen-Ruthen betragen hätte, so wäre die Rechnung folgende:

$$16 : 9 = 6^2 : \text{Sx}^2$$

$$16 : 9 = 36 : \frac{36 \cdot 9}{16}$$

oder $(Sx)^2$ wäre $= \frac{1}{4}$ (81) Quadr Ruthen
also $\sqrt{(Sx^2)}$ oder $Sx = \frac{1}{2}$ (9) oder $(4 + \frac{1}{2})$
Ruth. in Länge.

Hiemit ist man nun am Ziel. Dann

hx ist $= (Sh - Sx)$

$(6 - 4,5) = 1,5.$

Die Distanz von CD bis EF ist daher $1\frac{1}{2}$ Längen Ruthen, in welcher denn die Parallele EF zu ziehen ist, welche die Figur EFCD begränzt, deren Fläche eben = 7 □ Ruthen ausmacht.

Die Länge der Linie EF aber ist = 4. Nemlich CD ist $= (5\frac{1}{3})$ oder $\frac{16}{3}$, indem $\frac{1}{2} \cdot (5\frac{1}{3})$ $(6) = 16$ der Innh. des △ SCD ist; nun ist die Fläche des Trapezions EFCD

$$7 = \frac{1}{2}(EF + CD) \cdot (hx)$$
$$= \frac{1}{2}(EF + \tfrac{16}{3})(\tfrac{3}{2})$$

Daraus erhält man zuerst

$(2 \cdot 7)(\frac{2}{3}) = (EF + \frac{16}{3})$; und demnächst
$(2 \cdot 7 \cdot \frac{2}{3}) - (\frac{16}{3})$ d. h. $\frac{28 - 16}{3} = EF$

d. h. $\frac{12}{3}$ d. i. $4 = EF$

Hiemit ist nun das ganze Problem aufgelöst, indem man jezt die Länge der Linie EF, und ihre Distanz von CD kennt.

3.

Man muß also, wie es scheint, doch jedesmal das Loth SH auf dem Feld messen, oder doch Sh, (wenn die Höhe des Trapezions schon bekannt wäre) um diese Rechnung führen zu können?

Antw. Diese **unmittelbare** Messung der Linie SH ist nicht ganz nothwendig. Wenn man des Punkts H nur gewiß ist, über welchem S liegt, so ist blos nöthig, daß man ein Dreieck CAt sich denke, in welchem Ct, senkrecht, so gros als Hh, und die Höhe des Trapezions selbst ist. Die 3 Linien At, Ct, AH lassen sich wohl jederzeit leicht messen; und sie sind zureichend, daß man schließe:

$$At : Ct = AH : SH$$

Und so kennt man $SH = Ct . \frac{AH}{At}$, ohne daß man von H bis S zu gehen, und wirklich zu messen brauchte.

Ein **anderer** Weg, SH zu finden, ist, wenn man einen Winkelmesser bei A oder bei B anwendet. Denn, wenn man den Winkel bei A oder tAC mißt, und dessen Tangente in den Tafeln aufschlägt, so darf man nur die gefundene Zal dieser Tangente mit AH multipliciren. Das Produkt

$$(TgA) . AH \text{ ist} = SH$$

und eben so ist

$$TgB . BH = SH$$

denn muß dabei denken

$$r : TgA = AH : SH$$
$$r : TgB = BH : SH$$

Durch diese trigonometrische Methode erspart man sich die Messung von 2 Linien auf dem Feld

At und Ct; aber dagegen muß man des Winkels tAC auch recht gewiß werden, um in der Rechnung gehörig SH zu finden.

Z. B. Es sei At $= \frac{2}{3}$; Ct $= \frac{5}{6}$ (Ruthen) und AH sei $= 8$; so ist die Rechnung

$$\frac{2}{3} : \frac{5}{6} = 8 \quad : \quad 10 = SH$$

und man hat SH ohne Winkelmessung gefunden.

Mißt man aber den Winkel, so muß der Geometer die Tangente A oder

TgA = Tg 51° 20ʹ, auch wohl Tg 51° 21ʹ als den Winkel bei CAt, bestimmen. Die Tafeln geben unmittelbar

$$Tg\ 51^\circ\ 20' = 1{,}2496$$
$$Tg\ 51^\circ\ 21' = 1{,}2504$$

Nun ist die Multiplication vorzunehmen:

(1,2496) . 8 ist = 9,9928

(1,2504) 8 ist = 10,0032

Das Product liegt in jedem Fall so nahe an 10, daß jeder Geometer in der Ausübung ohne Zweifel die Zal 10 selbst dafür annehmen wird.

Da aber unsere Winkel-Instrumente (wie sie gewöhnlich gefunden werden) selten bis auf 3 Minuten ganz genau sind, so erkennt man leicht, daß die unmittelbare Messung der Linien, (wie der 2 Linien At, Ct) der Winkelaufnahme vorzuziehen sei, wenn man bequem beikommen, und die Linien messen kann. Allein es giebt manche Fälle, in welchen die Winkelmessung doch auch vortheilhaft, und selbst ein Bedürfnis ist. Des-

halb ist es allerdings anzuempfehlen, daß man die Methode der Rechnung mit Tangenten kennen lerne, und daß man sich deshalb mit dem angezeigten 2ten Weg vertraut mache.

2.

Wie hat man es aber anzufangen, wenn verlangt wird, von einem Trapezion ABEF ein bestimmtes Feldstück unten vom breitern Theil abzuschneiden z. B. 13, 3 Quad. Ruth. insoferne dabei die Grenzlinie (die neue Scheide-Linie) mit der Grundlinie parallel lauffen soll? wie findet man die gehörige Länge dieser Linie, und ihren Abstand von AB?

Antwort. Man benenne diese neue Linie CD; sie ist parallel mit AB und EF zu denken, u. man stellt sich also leicht ein Trapezion ABCD vor; dessen Innhalt ist schon ausgesprochen = 13, 3 Quad. Ruthen. Es ist ein Theil des gegebenen grössern ABEF.

In diesem Grössern kennt man die Länge der 2 Parallelen AB und EF wie auch die Höhe Hx; — dieses darf man ganz wohl annehmen. Fehlte eine dieser Linien, so würde sie sich leicht durch wirkliche Messung finden lassen; die Höhe Hx selbst auch ohne wirkliche Messung, wenn etwa nur der Innhalt des Trapezions gegeben wäre, nebst den 2 Parallelen. Diese Höhe hat man nun sogleich zu folgendem Verfahren nöthig:

Man nehme sich vor, das Trapezion EFAB zu einem Dreieck SAB zu ergänzen, und dessen Innhalt zu bestimmen. Um dieses auszuführen, muß man dessen Höhe SH kennen. Wie man diese findet, ist bereits auf dem vorigen Blatt gezeigt worden:

$$SH \text{ ist jederzeit} = \frac{ER \cdot AH}{AR}$$

$$\text{auch} = AH \cdot (Tg \cdot A)$$

Der Innhalt des $\triangle$ SAB ist also auch leicht zu berechnen : $\frac{1}{2}$ (SH . AB) = $\triangle$ SAB.

Man sehe nun die Figur an; SCD ist ein kleineres ähnliches Dreieck; es ist um das abzuschneidende Stück kleiner, als SAB. Ist dieses Stück z. B. 16 □ Ruthen; so ist

$$\triangle SCD = (\triangle SAB - 13{,}3)$$

eine bekannte Fläche; (als Zal-Größe nemlich.) Aber man kennt damit weder deren Höhe, noch deren Basis CD, bis jezt, einzeln, sondern blos deren halbes Product.

Kennten wir aber nur die Basis CD einzeln, (als Zal oder Länge) so wären wir am Ziel. Dazu ist nun Rath vorhanden! Der Geometer denkt nun an den Saz: „2 ähnliche Dreiecke verhalten sich, wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten.“ Diesemnach gelten hier die Verhältnisse:

$$\triangle SAB : \triangle SCD = AB^2 : CD^2$$

$$\text{und } CD^2 \text{ ist also} = \frac{SCD \cdot AB^2}{SAB}$$

D

Die 3 vordern Glieder sind schon berechnete Grössen (nach den 10 oder 12 vorhergehenden Zeilen); und so ist blos noch die Quadratwurzel aus einer Zal zu ziehen, welche uns den angegebenen Quotient (in dem 4ten Glied) angiebt. Hiemit kennt man die gesuchte Linie CD.

Ebendieselbe ist zugleich die Parallele in dem neuen Trapezion ABCD, d. h. die Scheide-Linie, welche man sucht.

Wie weit sie von AB entfernt liege, und wo sie also hinzuzeichnen sei, kann man nun sogleich dadurch finden, daß man die Formel so sich denkt:

der Innhalt des neuen Trapezions ABCD ist

$$\tfrac{1}{2}\,(AB + CD) \cdot Hh = (13,3)$$

Also $$Hh = \frac{2 \cdot (13,3)}{AB + CD}$$

Ein figurirtes Beispiel in Zalen wird das Verfahren deutlicher machen:

Ein Trapezion ABEF = 27 Qu. Ruthen enthaltend, sei vorgelegt; dessen Basis sei AB = 10; die Höhe Hx = 3 Ruthen. EF = 8.

Also die Fläche $= \tfrac{1}{2}\,(10 + 8) \cdot 3$

oder $\tfrac{1}{2}\,(18 \cdot 3)$ d. h. $(9 \cdot 3) = 27$.

Von dieser Fläche sollen $13\tfrac{3}{10}$ Qu. Ruthen weggemessen werden.

Man suche SH, die Höhe in einem △ SAB gesezt man hätte gefunden, SH = 14; nemlich etwa so: ER ist = Hx; also = 3

$$AR : AH = ER : SH$$
$$2 : 9\tfrac{1}{3} = 3 : 14$$

Daher die Fläche des $\triangle$ SAB $= \frac{1}{2}$ (AB . SH)

$\frac{1}{2}$ (10 . 14)

oder (7 . 10) d. h. 70 Qu. Ruthen.

Nun muß ein $\triangle$ SCD $= (70 - 13,3) = 56,7$ in Fläche betragen. Es ist ein Dreieck, das noch nicht gezeichnet vor uns steht, weil wir die Länge der Basis CD noch nicht kennen. Aber dessen Fläche muß doch eben 56,7 betragen, weil die Forderung dahin geht: „von 70 müssen 13,3 weggenommen werden.

Wir kennen daher nun die Flächen der 2 Dreiecke SAB und SCD.

Diese verhalten sich nun, wie die Quadrate ihrer Grundlinien:

$$SAB : SCD = AB^2 : CD^2$$
$$70 : 56,7 = 100 : CD^2$$

Das lezte Glied ist $= \frac{5670}{70} = 81$. Also ist CD $= 9$.

Somit kennt man nun die Länge der Grenzlinie in dem neuen Trapezion ABCD. Wie groß ihre Distanz von der Parallele AB zu nehmen sei, (Hh) erfährt man vermittelst der Formel:

$$13,3 = \tfrac{1}{2}(AB + CD) . Hh$$

Hier $13,3 = \frac{1}{2}(10 + 9)$. Hh

Aus derselben folgt der Betrag dieser Höhe:

$$2 . \frac{(13,3)}{19} = Hh;$$ oder $1\frac{4}{10}$ ist $=$ Hh

Und so kann man dieses Trapezion nun ohne Anstand auftragen und zeichnen.

5.

An der Richtigkeit dieses Verfahrens ist nun nicht zu zweifeln. Allein, wenn etwa Hindernisse sich zeigen, daß man weder zu dem Scheitel-Punkt des Dreiecks S gehen oder bis dahin messen, noch selbst nur im Visiren dahin sehen kann, wie benimmt man sich alsdenn? was beginnt man, um dennoch ein verlangtes Stück, wie ABCD ist, wegzuschneiden? (Fig. IV.)

Antwort. Diese Einwendung ist gut gegründet. Der Fall kommt mehrmals vor, daß das Visiren nach S nicht wohl angeht, und daß man daher der Linie AH auf der Grundlinie nicht gewiß ist. Viele Feldmesser helfen sich nun damit, daß sie mehrere Versuche anstellen, und ein Trapezion, das sie nach dem Augenmaas ausstecken, ausmessen; und je nachdem die Berechnung ausfällt, ein zweites kleineres oder grösseres annehmen, und so durch Schäzung endlich der Stellung der Scheide-Linie CD sich vergewissern.

Aber es giebt eine ganz sicher führende Methode, welche dieser Versuchs-Praxis vorzuziehen ist. Diese ist folgende:

Man denkt sich die Fläche des abzuschneidenden Stücks zuerst als ein Dreieck, dessen Basis AB wäre, und sucht die Höhe in diesem Dreieck.

Der bekannten Formel gemäs:

Höhe = (Doppelt. Innh.) divid. durch die Basis

würde, wenn man das lezte Beispiel beibehalten mag, diese

$$\text{Höhe} = \frac{2 . (13,3)}{10} \quad \text{oder } (2,66)$$

seyn; man nenne sie VT.

Diese Linie werde nun auf dem Feld gemessen, als ein Loth auf AB. Durch einige Stäbe, welche man in der Richtung der gegebenen Seiten-Linie des vorhandenen ersten Trapezions von A nach E herauf steckt, wird man den Punkt V bald finden, und so auf den Punkt Z auf der andern Seite von B nach F herauf, so daß man ein neues Trapezion ABVZ gar leicht wird zeichnen, oder auf dem Feld abstecken können. VZ ist eine Parallele mit AB, und von ihr um 2,66 entfernt, d. h. um die Länge der Höhe VT.

Ist nun diese Linie VZ gemessen, so multiplicire man deren Längen-Zal, mit der von AB; so daß also

(VZ . AB)

ein Produkt ausmache. In unserm angenommenen Beispiel wird man finden, daß VZ = $8\frac{1}{10}$ oder 8,1 in Länge betrage; daher ist denn

(VZ . AB) = (8,1 . 10) = 81.

Dieses Product ist nun jedesmal so gros, als CD^2; also so gros, als das Quadrat der gesuchten Scheide-Linie CD, welcher wir bedürfen, um

das Trapezion ABCD zu erhalten, dessen Innhalt bereits = 13,3 Qu. Ruthen ausgesprochen ist. Die Linie CD ist = $\sqrt{(81)}$ oder 9 Längen-Ruth.

Dieses Verfahren ist einfach und sicher. Auf dem Feld muß man blos die Höhe VT genau auftragen, und die Länge VZ genau ausmessen. So bald dieses geschehen ist, so behandelt man die 2 Größen VZ und AB, als 2 Factoren, wie angegeben worden.

6.

Allerdings ist diese Operation einfach. Aber kann man auch einen allgemein überzeugenden Beweis beibringen, daß nicht nur in dem vorgetragenen Beispiel, oder in einzelnen Fällen; sondern durchaus jedesmal auf diesem Weg eben die Größe CD herauskomme, welche auf dem andern streng erwiesenen Weg gefunden wird?

Antwort. Ja, man kann diesen Beweis führen:

Zuerst erwäge man, daß das Loth VT sich jederzeit, als ein Stück der Höhe SH, in dem ganzen Dreieck SAB, gedenken lasse. (Denn dieses Dreieck muß man bei diesem Beweis wieder zu Hülfe nehmen). Man rücke VT nur in Gedanken herüber bis auf SH; offenbar deckt VT das Stück von SH, welche MH in der Figur heißt; und SM ist die Differenz; oder

$$(SH - VT) \text{ ist } = SM$$

Die Aehnlichkeit der Dreiecke SAB und SVZ berechtiget, zu sezen:

$$SH : AB = SM : VZ$$
$$\text{oder} = (SH - VT) : VZ$$

und VZ ist daher $= \frac{AB}{SH}(SH - VT)$

In diesem Ausdruck läßt sich anstatt VT auch schreiben:

$$\frac{AB}{SH}\left(SH - \frac{2.(13,3)}{AB}\right)$$

und, wenn der Flächen-Innhalt des $\triangle$ ABV nicht eben 13,3 betrüge, sondern eine andere Zal, N, so ließe sich ohne Zweifel allgemein sezen:

$$VZ \text{ ist } = \frac{AB}{SH}\left(SH - \frac{2.N}{AB}\right)$$

Unsere Behauptung heißt nun:

$$VZ . AB \text{ ist } = CD^2$$

Daher läßt sich dann auch sprechen, (wenn sie gegründet ist)

$$\frac{AB}{SH} . \left(SH - \frac{2.N}{AB}\right) . AB \text{ ist } = CD^2$$

oder kürzer: $\left(AB - \frac{2.N}{SH}\right) . AB = CD^2$

In dieser Gestalt erscheint kein VT und kein VZ mehr in der Formel, sondern blos AB, SH und N.

Nun ist zu zeigen, daß auf dem andern Weg, (dem ersten streng bewiesenen) eben dieses Aequivalent von CD^2 hervorgehe. Dieses läßt sich, wie folgt, darthun:

Wir kennen die vollkommen-gerechtfertigte Gleichung

$$\frac{SCD \cdot (AB)^2}{SAB} = CD^2$$

Dafür läßt sich zuerst der Ausdruck sezen:

$$\frac{SCD \cdot (AB)^2}{\frac{1}{2}(AB \cdot SH)} \text{ oder } \frac{SCD \cdot 2 \cdot AB}{SH} = CD^2$$

Es darf aber ferner auch (SAB — N) anstatt SCD eingesezt werden; so wie in dem obigen Beispiel

$$(\Delta\, SAB - 13{,}3) = \Delta\, SCD$$

gegolten hat. Denn N bedeutet ja die ausgesprochene Fläche, die Größe, welche man abziehen soll; und, wenn sie wirklich abgezogen wird, so ist eben das △ SCD als Rest anzusehen; also gewiß allgemein = (△ SAB — N).

Man schreibe also:

$$(SAB - N) \cdot \frac{(2 \cdot AB)}{SH} = CD^2$$

Eben so viel beträgt

$$\left(\frac{AB \cdot SH}{2} - N\right) \cdot \left(\frac{2 \cdot AB}{SH}\right) = CD^2$$

Multiplicirt man diese Factoren, so erhält man offenbar:

$$AB^2 - \frac{2 \cdot AB \cdot N}{SH} = CD^2$$

$$\text{oder } \left(AB - \frac{2 \cdot N}{SH}\right) \cdot AB = CD^2$$

und so sieht man ganz eben die Gleichung vor

sich, welche nach der vorgegangenen Deduction, das Aequivalent von (VZ . AB) = CD^2 ist.

Dieser Beweiß läßt also gar keinen Zweifel übrig, daß der eine Weg so gut, als der andere, und streng geometrisch richtig sei *).

---

*) Diesemnach läßt sich auch in der ersten Aufgabe, in welcher die Linie EF gesucht und gefunden worden, (EF = 4) diese Linie so ans Licht bringen: Man denkt: EFCD ist = 7; CD = $5\frac{1}{3}$ die Basis. Nun bildet man ein Dreieck in Gedanken, dessen Innhalt = 7 sei; die Höhe darinn VT = (2 . 7 : $5\frac{1}{3}$) oder $\left(\frac{14 \cdot 3}{16}\right) = 2\frac{5}{8}$.

Da nun VZ = 3 in Länge (gemessen) halten wird, auch halten muß, weil SM hier Sh — VT ist d. h. $(6 - 2\frac{5}{8}) = 3\frac{3}{8}$ oder $\frac{27}{2}$; und daher die Proportion eintritt:

Sh : SM = CD : VZ
hier 6 : $\frac{27}{8}$ = $\frac{16}{3}$: 3

so bildet man aus den 2 Factoren (VZ . CD) das Product, welches EF^2 giebt

(3) ($\frac{16}{3}$) = 16 ist = EF^2
Und deshalb 4 ist = EF.

ganz so, wie oben gefunden worden.

VII.

Ueber die Vergleichung der Quadrat-Flächen, welche man erhält, wenn in gleichschenklichten Dreiecken, die Basis, und eine der gleichen Seiten quadrirt werden.

I.

Wenn man ein Quadrat zu haben verlangt, dessen Fläche der Summe von 2 Quadraten gleich sei, so ist das Verfahren gar wohl bekannt, ein solches Quadrat herzustellen. Es sind 2 Linien senkrecht zusammen zu stellen, d. h. unter einem Winkel von 90 Gr., jede solang, als eine Seite von den kleinern Quadraten. Die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite ist hier zu quadriren, und man hat damit die verlangte Fläche, welche also doppelt so gros ist, als die Fläche eines der 2 Quadraten, welche auf den 2 Seiten-Linien sich errichten lassen. Aber, wie hat man sich zu benehmen, wenn verlangt würde, ein Quadrat auf eine Linie zu errichten, dessen Fläche 3 mal so gros, als das Quadrat auf einer andern gegebenen Seiten-Linie seyn soll?

Antwort. Man muß zuerst so denken: die Linie, auf welcher (als Basis) ein Quadrat = 3 Quadrat-Fuß stehen soll, muß = $\sqrt{3}$ seyn;

so wie die, auf welcher (als Basis) ein Quadrat von 4 Qu. Fuß steht, gewiß = $\sqrt{4}$ oder 2 ist.

Eine Linie so gros, als $\sqrt{3}$ findet sich als Sehne in jedem Kreis, dessen Halbmesser r = 1 ist, wenn man ein gleichseitiges Dreieck in einen solchen Kreis einschreibt, dessen 3 Spizen die Peripherie (inwendig) berühren. Man erhält durch diese Einzeichnung 3 Sehnen; jede derselben gehört einem Bogen von 120 Graden zu; weil der 3te Theil von 360 Graden eben 120 ist; und 3 gleiche Bogen augenscheinlich durch diese Einzeichnung abgestochen oder markirt werden.

Um der Aufgabe eine Genüge zu leisten, darf man daher nur jedesmal zwei Linien, deren jede = 1 (in Länge) sei, so zusammen stellen, daß ihre Neigung einen Winkel von 120 Gr. formire, und sie beede mit einer 3ten verbinden, welche also ein Dreieck schließen wird. Diese 3te Linie werde als die Basis eines Quadrats angesehen; oder dieses wirklich darauf errichtet. Seine Fläche ist 3mal so gros, als das Quadrat jeder der 2 andern Seiten; oder 3 gegen 1.

6.

Wie findet man aber diese Linie, welche = $\sqrt{3}$ seyn soll, durch eine geometrische Construction? (ohne den Kreis zu Hülfe zu nehmen).

Antwort. Man denke sich ein gleichseitiges Dreieck ABC; jede Seite sei = 1 in Länge. Man fälle ein Loth CD von einer der Spizzen.

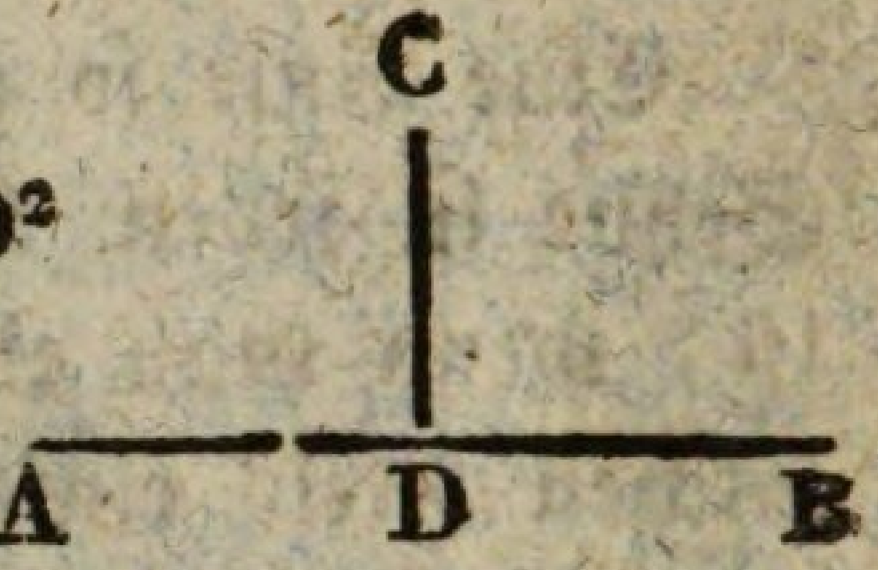
Gewiß ist $\frac{1}{2}$ AB = AD; und

AC^2 ist $= AD^2 + CD^2$;

oder $1 = (\frac{1}{2})^2 + CD^2$.

Daher dann $1 - (\frac{1}{2})^2$ soviel als CD^2

d. h. $1 - \frac{1}{4}$ oder $\frac{3}{4}$ ist $= CD^2$.



Nothwendig ist deshalb dann

$$\sqrt{(\tfrac{3}{4})} = \sqrt{(CD)^2} \text{ oder } = CD$$

Aber $\sqrt{(\frac{3}{4})}$ ist $= \frac{\sqrt{3}}{2}$ weil $\sqrt{(\frac{1}{4})} = \frac{1}{2}$ ist.

Demnach hat man hiemit eine Linie vor sich, welche halb so gros, als $\sqrt{3}$, oder $\frac{1}{2}\sqrt{(3)}$ ist. Wenn man aber die Helfte einer Linie kennt, so ist auch die ganze Linie hiemit gegeben; also ist $2 . CD = 2 [\frac{1}{2}(\sqrt{3})]$
das ist eben: $2 . CD$ ist $= \sqrt{3}$.

Wenn man das gleichseitige Dreieck ACB doppelt zeichnet, so kann man sich die längere Diagonale eben deshalb auch als $= \sqrt{3}$ vorstellen; und damit erkennt man gewiß, daß es jederzeit sehr leicht ist, eine Linie in Zeichnung darzustellen, deren Länge $= \sqrt{3}$ beträgt.

3.

Nach diesem allen läßt sich doch wohl vermuthen, daß man auch den Winkel werde angeben können, unter welchem 2 gleiche Linien zu öffnen sind, wenn das Quadrat der dem Winkel gegenüber gezogenen Linie $1\frac{1}{2}$ mal so gros seyn sollte, als das Quadrat von einem der 2 Seiten-Linien?

Antwort. Da hier die Fläche eines Quadrats = $\frac{3}{2}$ angenommen ist, so muß die Grundlinie desselben = $\sqrt{(\frac{3}{2})}$ oder $\sqrt{(1,5)}$ betragen.

Diese Größe beträgt in Decimalen = 1,224744. Wenn nun die 2 gleiche Neben-Seiten, (jede) die Länge = 1 haben, so lassen sie sich als Radien eines Kreises (r = 1) ansehen, und die Linie, welcher die Länge 1,224744 . . . zukommt, als eine Sehne. Wenn man nun Sehnen-Tafeln besizt, so findet man in denselben, welcher Winkel einer Sehne zugehöre, die diese Länge eben hat. Man findet, daß er = 75° 31' und etwas sehr weniges darüber betrage. Da Sehnen-(oder Chorden) Tafeln neuerlich nicht mehr so üblich sind, wie Sinus-Tafeln, so bedient man sich zu diesem Zwek mehr der leztern, welches darum angeht, weil jede Chorde sich als ein doppelter Sinus denken läßt:

(Chorde C = 2 . Sin. $\frac{1}{2}$ C.)

d. h. als das Doppelte eines Sinus, der zu einem halb so großen Winkel gehört. Nothwendig ist deshalb auch $\frac{1}{2}$ Chord. C = Sin. $\frac{1}{2}$ C. Nun ist in diesem angenommenen Fall $\frac{1}{2}$ (1,2247443) = $\frac{1}{2}$ Chorde zu denken; als = 0,6123721 . . Und diese Zal ist nun in den Sinus-Tafeln aufzusuchen. Hier findet sich

der Sin. 37° 45' = 0,612217
und Sin. 37° 46 = 0,612447

Also wohl nahe 37° 45$\frac{1}{2}$ ist = 0,612332 . .

von welchen unsere vorhandene 0,612372 . . gar nicht viel entfernt liegt. Der Chorde 75° 31' kommt daher die Zal zu: 1,22466. Wenn man diese mit

$$\sqrt{(1,5)} = 1,22474 \ldots$$

vergleicht, so überzeugt man sich wohl leicht, daß die Sehne von 75° 31' eben die Linie sei, welche den Winkel angiebt, auf den man ausgegangen ist; wenigstens bis auf $\frac{1}{4}$tels Minute hin, und also scharf genug.

4.

Aus eben diesen Tafeln wird sich also auch wohl jede umgewendet gestellte Frage auflösen lassen, wenn man z. B. wissen wollte, wie gros das Quadrat einer Linie sei, welche einen Winkel von 30 oder 40 oder mehr Gr. entgegenliegt, wenn jede der 2 andern Seiten-Linien = 1 angenommen wird?

Antwort. Allerdings kann man in zulänglicher Näherung jede Frage dieser Art schnell beantworten. Wenn z. B. die Winkel = 30° ausgesprochen worden wäre, so denkt man sich die Linie als Chorde von 30 Gr.; in den Tafeln aber sucht man die Größe, welche zu Sin. 15° gehört. Sie heißt: 0,2588190. Die Sehne selbst ist daher, 0,5176380. Und das Quadrat dieser Zal giebt die Fläche des Vierecks an, welches man sucht; sie beträgt 0,267949. Da diese Größe nur etwas weniges, mehr als $\frac{4}{15}$ ausmacht (= 0,2666);

so ergiebt sich daraus die Antwort auf die vorgelegte Frage:

„das Quadrat der Linie, welche einem Winkel „von 30 Graden gegenüber liegt, ist beinahe nur „$\frac{4}{15}$ so gros, als das Quad. einer der Seitenlinien, „d. h. als eines der 2 Schenkel in einem Dreieck, „in welchem jeder = 1 angenommen wird" *). Ein solches gleichschenkliches Dreiecks muß man sich bei allen Problemen von diesem Schlag denken.

Wenn man es unternimmt, die Probe durch die Umwendung der Frage zu machen, indem man von einer bestimmten Fläche = $\frac{4}{15}$ ausgeht, so wird man den Winkel, der in der Skize des gleichschenklichten Dreiecks liegt, um etwa 4 Minuten kleiner, als 30 Grade finden, welches nicht anders seyn kann, da in diesem Beispiel nur durch eine Fiction die Größe 0,266 ... für die Zal 0,2679 ... eingeschoben worden ist, welches man sich in Fällen, wo es auf eine Genauigkeit von wenigen Minuten nicht ankommt, oft erlaubt.

Die Quadratwurzel aus $\frac{4}{15}$ beträgt 0,516410; also deren Helfte 0,258205. Diese Größe liegt sehr nah an der des Sinus 14° 58', indem diese 0,25825 heißt. Das Doppelte hievon führt auf 29° 56'; woraus man sieht, daß nach 4 Minuten

*) Wenn also in einem solchen Dreieck das Quadrat eines Schenkels 15 □ Schuhe hielte, so wird das □ auf der Basis, welche dem Winkel von 30° gegenüber liegt, nur 4 Quadr. Schuhe betragen.

zu der Größe des Winkels von 30 Gr. abgehen. — Es ist immer nüzlich, daß man dergleichen Vergleichungen anstelle, damit man einsehe, wie viel man von der strengen Wahrheit abweiche, wenn man sich die Einsezung gewißer Näherungs-Größen da und dort erlaubt.

VIII.

Belehrung 1) wie man die Sehne eines Kreises finden könne, ohne den Kreisbogen zu messen, ohne Winkel-Instrumente anzulegen, und ohne Trigonometrie. 2) Wie man jeden Punkt, der zwischen 2 Parallelen liegt, deren Distanz gegeben ist, ebenfalls genau finden und bestimmen könne, ganz ohne die gedachten Mittel.

Fig. V

1.

Zwischen 2 Parallelen läßt sich jederzeit ein Kreis legen, welcher beede berührt, in A und D. Die Entfernung der 2 Parallel-Linien ist also hier ein Kreis-Durchmesser AD. Diese Entfernung, AD, sei gegeben = 2 Ruthen. Man denke das Auge eines

Menschen in A, und es sehe nach einem Punkt der Parallele, nach E. Die Linie AE, nach deren Richtung das Auge sieht, wird allemal durch den Umfang des Kreises gehen; der Punkt in ihm, durch den sie geht, heiße B. Da er in der Peripherie liegt, so ist AB eine Sehne dieses Kreises. Es fragt sich, was dazu gehöre, die Länge dieser Linie AB zu finden? und auch ihren Abstand von dem Durchmesser des Kreises, welche Linie BG heissen soll?

Antwort. Man kann diese Linie AB, wenn man den Winkel in A am Auge mißt, und Sinus u. Tangenten anwendet, durch Hülfe weniger Säze der Trigonometrie leicht finden. Allein sie läßt sich auch von jedem Geometer, der keine Trigonometrie kennt, oder sie eben nicht anzuwenden für räthlich hält, finden; selbst ohne daß es nöthig wäre, den Winkel am Aug mit einem Instrument, das Grade und Minuten angiebt, gemessen zu haben. Wenn man blos mittelst eines Lineals von A nach E fein visirt, (oder mittelst irgend einer Vorrichtung) und die Linie DE oder deren Parallele, von A nach F, genau gemessen hat, so reicht die Kenntnis dieser 2 Linien zu, die Länge der Linie AB zu berechnen; und also den Punkt in der Kreis-Peripherie zu bestimmen, durch welchen die Linie AE geht.

2.

Wie dieses zugehen mag, möchte ich wohl auch erfahren! — da ich mich nicht entsinne, in Lehrbüchern hierüber etwas gelesen zu haben?

Antwort. Man erwäge, daß der Durchmesser AD eine gegebene Größe sei, eine bestimmte Länge; dieses wird einmal angenommen. Auch die Linie AF muß, als bekannt, zugegeben werden. Da man den Punkt E von A aus sehen kann, so liegt nichts unnatürliches darinn, daß man auch von A nach F gehen könne, d. h. bis an einen Punkt, in welchem E vertikal gegen F liegt, oder in der senkrechten Linie EF. Dieser Punkt ist jederzeit bald ausfindig zu machen; und daher ist dann auch DE = AF gegeben. Ist dem so, so ist auch AE als bekannt anzunehmen, z. B. wenn AF = $1\frac{1}{3}$ Ruthen, oder = $\frac{4}{3}$ wäre, so würde

$$AE = \sqrt{(AD^2 + DE^2.)}$$
$$= \sqrt{(4 + \tfrac{16}{9})} = \frac{\sqrt{52}}{3} \text{ seyn.}$$

In Decimalen: = $\frac{1}{3}$ 7,211102 = 2,403700 zwar eine etwas beschwerliche Zal, aber immer zulänglich genau.

$$\text{Nun ist } \frac{AD}{AE} \text{ hiernach} = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{52}} = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{(4 \cdot 13)}}$$

$$\text{oder} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

Nehmlich

$$AD : AE = 2 : \frac{\sqrt{52}}{3}$$

führt auf diesen Quotienten

$$\frac{AD}{AE} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

Ganz eben so ist

$$\frac{DE}{AE} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{52}} = \frac{4}{\sqrt{52}} \text{ oder } \frac{2}{\sqrt{13}}$$

weil $DE : AE = \frac{4}{3} : \frac{3}{\sqrt{52}}$ ist

Nun stelle man sich in Gedanken nur eine Linie CB vor; d. h. einen Halbmesser des Kreises, dessen Durchmesser AD gegeben ist. Da B in der Peripherie liegt, so kann CB nichts anders, als ½ AD seyn, in soferne man C als den mittelsten Punkt zwischen A und D annimmt, und eben damit als das Centrum des Kreises anerkennt, in welchem irgendwo der Punkt B liegen soll.

Hiemit bildet sich ein gleichschenklichtes Dreieck ACB, wie für sich selbst, ohne Kunst. Die Seite AB in demselben ist eine Sehne des gedachten Kreises, und ist eben die Linie, deren Länge zu finden wir ausgehen und bemüht sind.

Wir werden schnell ihre Helfte finden, wenn wir unserer Einbildungskraft nur noch eine kleine nicht beschwerliche Zumuthung machen. Sie soll blos eine senkrechte Linie von dem Centrum aus, auf die Sehne AB legen, CL, d. h. wir sollen uns AB durch ein Loth von C aus halbirt denken. Damit entsteht ein rechtwinklichtes Dreieck

ACL. Dieses Dreieck ist dem Dreieck ADE ähnlich. Denn der Winkel A ist beeden gemeinschaftlich; bei L ist ein rechter Winkel, so wie D in dem △ ADE ein rechter Winkel ist. Der 3te Winkel ACL muß also dem Winkel AED gleich seyn.

Sind wir nun hievon überzeugt, so hindert uns gewiß nichts, den Schluß zu formiren, daß

AE : zu AD = wie AC : zu AL

sich verhalte. In den angenommenen Zalen ist daher gewiß:

$$\frac{\sqrt{52}}{3} : 2 = 1 : \frac{6}{\sqrt{52}}$$

Und hiemit kennen wir dann nun die Helfte unserer gesuchten Linie:

$$AL = \tfrac{1}{2}\, AB \text{ ist } = \frac{6}{\sqrt{52}}$$

Folglich die ganze Linie AB ist $= \frac{2 \cdot 6}{\sqrt{52}}$ oder $\frac{6}{\sqrt{13}}$. Damit sind wir am Ziel! denn die Länge von AB ist nun wirklich gefunden.

Die Lage dieses Punkts wird übrigens völlig vollends bestimmt, wenn man auch angeben kann, wie weit er von dem Durchmesser AD absteht. Die senkrechte Linie BG ist diese seine Entfernung. Man erkennt sogleich daß

$$BG = \frac{AB \,.\, DE}{AE} \text{ sei,}$$

weil AE : AB = wie DE : BG sich verhält.

In Zahlen ist hier BG $= \frac{12}{13}$

$$\frac{\sqrt{52}}{3} : \frac{12}{\sqrt{52}} = \frac{4}{3} : \frac{12}{13}$$

$$= 1,333 : 0,923076$$

Hiemit ist also der zweite Theil der Aufgabe, so gut, als der erste aufgelöst.

3.

Sollte sich wohl zum praktischen Gebrauch nicht alles noch kürzer zusammen ziehen lassen, um AB und BG noch schneller zu finden?

Antwort. Des Beweises wegen ist es wohl nöthig gewesen, die Säze so zu stellen, wie sie bis hieher von mir gestellt worden sind. Aber nun, da an der Evidenz der Behauptung nicht mehr zu zweifeln ist, läßt sich wirklich zum Gebrauch in Kürze die Behauptung aufstellen:

AB ist jedesmal $= \frac{AD^2}{AE}$

Diese Gleichung ist schnell erwiesen. Wir kennen aus vor. Blatt:

AL oder $\frac{1}{2}$ AB $= \frac{AD . AC}{AE}$ d. h. $\frac{AD . \frac{1}{2} AD}{AE}$

oder $\frac{AD^2}{2 . AE}$

Wenn dem nun so ist, so ist 2 AL oder AB nothwendig $= \frac{AD^2}{AE}$

Der Praktiker, welchem AD gegeben ist, hat

also nichts zu thun, als die Hypotenuse AE zu suchen. Diese dividirt er in das Quadrat des Durchmessers, und der Quotient ist die Größe der Linie AB.

Die andere Linie BG erhält er sogleich, wenn er AB mit dem Quotienten $\frac{DE}{AE}$ multiplicirt. Denn

$$BG \text{ ist } = \left(\frac{DE}{AE}\right) . AB .$$

Aber er kann, wenn er will auch BG noch vor AB erhalten, (ehe er nur AB berechnet hat). Denn es ist

$$BG = \frac{AD^2}{AE^2} . DE$$

Diese Behauptung läßt sich sogleich jedem, der nur in die Figur sieht, einleuchtend darthun. Die 2 rechtwinklichte Dreieck ADE und AGB sind ähnlich; Es verhalten sich also darinn

$$AE : AB = DE : BG$$

$$\text{Aber } AB \text{ ist } \left(\frac{AD^2}{AE}\right)$$

Also

$$AE : \frac{AD^2}{AE} = DE : BG$$

Und wenn in die 2 ersten Glieder mit AE multiplicirt wird:

$$AE^2 : AD^2 = DE : BG$$

wo nun kein AB mehr erscheint, und BG blos

durch AD, DE, AE, d. h. durch die 3 Seiten des erstern Dreieck ADE ausgedrükt hervorgeht.

4.

Die Entfernung vom Auge bis an den Punkt G auf dem Durchmesser selbst (auf welchem Punkt das Loth BG fällt) kann nun wohl ebenfalls durch ein Paar Seiten dieses Dreiecks ausgedrükt werden? — nemlich die Länge der Linie AG?

Antwort. Man kommt hiebei bis auf den Cubus des Durchmessers. Denn AG ist $= \frac{AD^3}{AE^2}$

Diese Gleichung beruhet auf nachfolgender Proportion:

Der Figur gemäs ist:

$$AE : AB = AD : AG$$

Man seze in das 2te Glied den Werth für AB ein, welchen wir schon aus dem vorigen Blatt kennen. Man wird also vor sich haben:

$$AE : \frac{AD^2}{EA} = AD : AG$$

Und daraus folgt natürlich:

$$\frac{AD^3}{AE^2} = AG$$

Diese hiemit erwiesene Ausdrücke für die 3 Linien AB, BG und AG sind nun wohl zu merken. Sie dienen noch zu vielen andern Vergleichungen. Es läßt sich daraus selbst die Ableitung machen, und deduciren, daß und wie man jeden

Punkt, der über oder unter B liegt, also nicht in der Peripherie selbst, sondern nur zwischen den 2 Parallelen AF und DE, wo es seyn mag, finden, und seine Distanz von A, wie auch seinen Abstand von dem Durchmesser bestimmen kann.

5.

Diese Erweiterung der zuerst gesezten Aufgaben scheint von nicht geringem Interesse zu seyn; wie kann dieses aber wohl gezeigt und erwiesen werden?

Antw. Man kann hiebei zwei Haupt-Fälle annehmen. Entweder, der von B verschiedene Punkt, welcher jezt gesucht werden soll, liegt zwar in der Richtung der Linie AE, aber zwischen A und B also innerhalb des Kreises; auch wohl zwischen B und E unten, wenn man will; und so ausserhalb des Kreises;
oder er liegt rechts oder links der Linie AE.

Dieser neue Punkt werde mit B′ bezeichnet. Laßt uns den ersten Fall annehmen; er liegt gegen A hin, näher, als B, der Punkt in der Peripherie, das sieht jedes Auge sogleich.

Man erwäge nun, daß, insoferne die Linie BG (dem gegebenen Beweis gemäs) bekannt ist, auch ein Stück der Linie AF, so lang als BG ist, als gegeben anzuerkennen sei. Man bezeichne diese Linie mit AI. Offenbar ist diese parallel mit BG und ihr gleich AI = BG
der Punkt I liegt senkrecht über B.

Ganz eben so muß aber nun ein Punkt zwischen A und I liegen, welcher senkrecht über dem neuen Punkt B′ stehen muß; und von welchem man nach B′ wird sehen können, so wie von I nach B, dem Punkt der Peripherie. Der Weg nach diesem Punkt von A aus gegen I genommen, ist augenscheinlich = G′B′; und er ist als gegeben anzunehmen, weil gar nichts hinderlich ist, dessen Länge zu bestimmen; d. h. ihn zu messen. Dieses angenommen, so wird einleuchtend, daß man berechtigt sei, zu sprechen:

$$GB : G'B' = \text{wie } AB : AB'$$

Indem man also 3 bekannte Größen in den 3 ersten Gliedern sieht, so ist auch das lezte Glied hiemit bestimmt; d. h. die Entfernung des Punkts B′ von Auge in A ist hiemit ausfindig gemacht; und hiemit das Problem aufgelößt.

Es ist wohl jedem klar, daß man auch hätte sezen dürfen:

$$DE : G'B' = AE : AB'$$

weil DE parallel mit GB steht.

Daß man nun auch die Entfernung des Punkts G′ von A (auf dem Diameter), wie auch die von dem Punkt G oder GG′ finden könne, bedarf wohl keines besondern Beweises mehr.

7.

Das alles ist überzeugend genug; wenn der neue Punkt B′ auf der Richtung der Linie AE selbst liegt.

Aber, wenn er seitwärts liegt; rechts oder links von AE?

Antwort. In diesem Fall muß man denken, die bisher angenommene Linie AE sei gar nicht vorhanden, sondern eine andere, nach deren Richtung das Aug von A aus nach dem neuen Punkt sieht. Man mag diese andere Linie immer auch AE heißen. Aber es ist nun ein anderer Winkel am Aug vorhanden, als der vorhergehende war; auch ein anderes B in der Peripherie. Die Peripherie bleibt eben dieselbe, und der Durchmesser AD ist gleichfalls ganz derselbe. Wenn nun der neue Punkt B nicht in der Peripherie selbst liegt, so muß ihn doch das Auge, das nach ihm von A aus sieht, in dieselbe versezen können. Es ist also doch jederzeit verstattet,

neben dem Punkt B′ ein neues B in der Peripherie anzunehmen.

Zu diesem neuen Punkt B in der Peripherie gehört ein neues Dreieck ABG, wie auch ein neues Dreieck ADE. Die Grundlinie in diesem Dreieck, DE läßt sich jederzeit berechnen, der Punkt B′ mag liegen, wo er will, wenn man nur nicht gehindert wird, von A darnach zu sehen, und von A hinüber nach F zu gehen und zu messen. Es kann gar nicht anders seyn, als daß man einen neuen Punkt E, und damit einen neuen Punkt F erhalte, weil der Durchmesser AD immer ebenderselbe bleibt, und auch die Richtung der Linie DE, welche der Linie AF jederzeit parallel ist.

Man kann sich 2 Figuren dazu entwerfen; eine wie unsere vorgelegte Figur; und die 2te eben so, nur mit einem andern Winkel, als der erste EAD war; so stellt sich alles deutlich hin. Fig. VI.

Nun gehe man den vorigen Weg. Man messe die neue Linie DE oder AF (von A ausgehend) und berechne hierauf, (den oben erwiesenen Angaben gemäs) die Längen der Linien, nach der Reihe:

Zuerst $AE = \sqrt{(AD^2 + DE^2)}$

Hierauf $AB = \frac{AD^2}{AE}$

Hierauf $BG = \frac{AD^2 . DE}{AE^2}$

oder auch $= \frac{DE . AB}{AE}$

Und $AG = \frac{AD^3}{AE^2}$

Hiemit ist man des Punkts in der Peripherie gewiß, unsers jezt gültigen Punkts, B. Und nun ist der Uebergang auf den neuen Punkt B', welcher nicht in der Peripherie liegt, leicht; man mißt blos ein Stück auf der Linie AF so lang, als B'G' ist, und fügt diese Größe, als 2tes Glied in die erwiesene Proportion ein:

$BG : B'G' = AB : AB'$

Damit ist die Entfernung des neuen Punkts vom Auge bestimmt; (AB') und also das Problem gelöst.

IX.

Ueber Zirkel = Rechnung (Cyklometrie.)

I.

Wenn man einen Faden, 48 Zoll lang, in ein Viereck legt, oder aufspannt, so hat jede Seite die Länge von 12 Zoll, der Innhalt aber (die innere Fläche) beträgt 144 Quad. Zolle. Wenn nun der nemliche Faden, als eine Kreisperipherie ausgespannt würde, welche Fläche würde er nun einschließen? Mehr oder weniger als 144 Quad. Zoll oder eben so viel?

Antwort. Diese innere Fläche erfährt man auf folgenden Weg: es ist längst gewiß ausgemacht, daß der Kreis-Peripherie die Länge von 314,159265 Zollen oder 314 $\frac{159}{1000}$ zukomme, wenn der Durchmesser eben 100 Längen-Zolle beträgt. Nun ist hier angenommen, die Länge des Fadens, der den Umkreis formirt, betrage = 48 Zolle; also ist verstattet, zu sprechen: *)

$$314{,}159\ldots : 48 = 100 : \frac{4800}{314{,}159}$$

Das lezte Glied ist = 15,2788

*) Wie man diese Größe mit so vielen Ziffern, auch mit noch mehrern, gefunden habe, muß in andern Schriften nachgesehen werden.

Und daraus folgt, daß der Durchmesser dieses Kreises 15 Zoll $2\frac{3}{4}$ Lin. (nahe genug genommen) sei; und also der Halbmesser = 7,63943 oder 7 Zolle, $6\frac{39}{100}$ Lin. betragen müsse.

Ist nun dem so, so berechnet man die Fläche dieses Zirkels in Quadrat-Zollen, wie folgt:

Bei Rad. = 1 ist die Kreis-Fläche = 3,14159, d. h. 3 Qu. Zolle 14 Qu. Lin.......

Nun verhalten sich alle Kreis-Flächen, wie die Quadrate ihrer Halbmesser:

Daher schreibt man:

$$1 : (7{,}63943)^2 = 3{,}14159 : x$$

Man hat demnach das Quadrat der Zal 7,63943 zu berechnen; es ist = 58,3611 . .

Diese Zal mit 3,14159 multiplicirt, gibt das lezte verlangte Glied: x = 183,347 · Qu. Zolle.

Und so gros ist der gesuchte Flächen-Gehalt des Kreises, dessen Umfang 48 Längen-Zolle beträgt: 183 Qu. Z. $34\frac{7}{10}$ Qu. Lin.

Die Fläche des Kreises ist also 39,347 Qu Zoll grösser als die des Vierecks, welches eben derselbe Faden umschließt, und welche = 12^2 oder 144 Qu. hält.

2.

Wenn dem so ist, so müßte ein Faden, welcher in ein Viereck ausgespannt, eine Länge von $183\frac{1}{3}$ Qu. Zollen, (welche mit 183,347 beinahe übereinkommen) einschliessen sollte, allerdings eine grössere Län-

ge haben, als 48 Zolle? Welche Länge müßte er haben?

Antwort. Da der Flächen-Innhalt dieses angenommenen Vierecks nun 183,347.. Qu. Zolle halten soll, so muß jede Seite dieses Vierecks

$= \sqrt{183,347}$

betragen. Der Wurzel-Auszug giebt die Zal 13,5711 in Länge. In Beziehung auf eine Figur läßt sich hiernach behaupten, daß jede Seite des bemelten Vierecks 13 Zoll $5\frac{4}{10}$ Lin. lang seyn müsse. Daher muß der ganze Umfang 54 Zoll $1\frac{6}{10}$ Lin. in Länge betragen.

Die Länge dieses Fadens ist diesem nach um 6 Zoll $1\frac{6}{10}$ Lin. verschieden von der Länge des Fadens, welcher das erste Viereck einschloß, dessen Fläche 144 Qu. Zoll betragen hat. Jede Seite ist nun um 1 Zoll $5\frac{4}{10}$ Lin. länger.

3.

Wenn man eine Kreisfläche sich denkt, welche eben genau 144 Qu. Zoll Innhalt haben soll, wie lang wird der Faden des Kreis-Umfangs seyn, und wie lang wird der Durchmesser dieses Kreises seyn?

Antwort. Man muß hier so denken,

144 ist hier $= (r^2 \,.\, 3{,}141..)$

als gegeben angenommen. Daher ist

$\frac{144}{3{,}141..} = r^2$; (das □ des Halbm.)

wo 3,141... die Zal 3,1415926 . bedeutet.

und $\sqrt{\left(\frac{144}{3,141..}\right)}$ oder $\frac{12}{\sqrt{(3,141..)}}$ ist = r

Die Ausrechnung giebt r = 6,770275 *)
Also 2 r oder diam. ist = 13,54 055

Hiernach hat man den Durchmesser dieses Kreises zuerst berechnet. Seine Länge beträgt 13 Zoll $5\frac{4}{10}$ Lin. . . .

Der Kreis-Umfang, welcher hieraus folgt, wird durch Aufstellung der Proportion gefunden:

100 : 13,54055 = wie 314,159 : 42,5389

Das lezte Glied sagt uns nun: „der Faden, wel„cher im Kreis geschlungen, diese Fläche von 144 „Qu. Zollen einschlöße, müßte 42 Zoll $5\frac{3}{10}$ Linien „lang seyn."

4.

Wenn man diesen Faden des Kreis-Umfangs von 142,53 Zollen nähme, und legte ihn in ein Viereck; wie gros würde die Fläche dieses Vierecks seyn?

Antwort. Der 4te Theil dieses Umfangs von 42 Zoll $5\frac{3}{10}$ Lin. würde 10,634 Zolle od. 10 Zoll $6\frac{1}{3}$ Lin. betragen. Das wäre also eine Seite die-

*) Man kann sich die Zahlen, welche

$$\sqrt{\left(\frac{1}{3,14159}\right)} = 0,5641895$$

beträgt, wohl merken. Sie dient in vielen Berechnungen. Hier nun ist sie 12 fach zu nehmen; u. $\frac{12}{\sqrt{(3,141..)}}$ ist 6,77075.

ses neuen Vierecks. Das Quadrat dieser Zal giebt die Fläche dieses Vierecks; in Qu. Zollen und Lin. = 113,097 .. oder 113 Qu. Zoll $9\frac{7}{10}$ Qu. Lin. gehen auf das Maas dieser Fläche.

5.

Wie gros ist der Umfang und der Innhalt eines Vierecks, welches in einen Kreis eingeschrieben werden sollte, dessen Fläche 183,347 wäre? und wie gros der Umfang und Innhalt eines Vierecks, das in den Kreis eingeschrieben würde, dessen Fläche 144 beträgt?

Antwort. Man weis aus der Elementar-Geometrie, daß bei $\left.\begin{array}{r} r = 1 \\ \text{oder } d = 2 \end{array}\right\}$ ein eingeschriebenes Viereck = 4. $\sqrt{2}$ sei; (jede einzelne Seite = $\sqrt{2}$;) und daher dessen Fläche = 2 betrage. Daher schließt man so:

Der Kreis-Fläche, welche 183,347 ist, gehört
der Halbm. zu = 7,63943
Und der Kreis-Fläche, welche 144 ist, gehört
der Halbm. zu = 6,770275

Daher schließet man wie folgt:

$1 : \text{zu } 7{,}63943 = \sqrt{2} : \text{zu } (7{,}636) . (\sqrt{2})$

$1 : \text{zu } 6{,}77027 = \sqrt{2} : \text{zu } (6{,}77027) . (\sqrt{2})$

Und das lezte Glied der 1sten Proportion
ist = 10,8038

Das lezte Glied der 2ten aber
ist = 9,57461

Die Fläche des ersten Vierecks aber beträgt
= 116,722 Qu. Zolle.

Die Fläche des 2ten Vierecks beträgt nur
91,6732 Qu. Zolle.

6.

Wie verhalten sich dann die Flächen dieser 2 Vierecke gegeneinander?

Antwort. Sie verhalten sich wie die Quadrate der Halbmesser der 2 Kreise; oder auch wie die 2 Kreisflächen selbst sich gegen einander verhalten:

116,722 zu 91,6732 = $\begin{pmatrix}(7,6394)^2 \\ 58,361\end{pmatrix}$: $(6,77027)^2$: (45,83661)

oder auch = (183,347) : (144)

das ist wie 100 zu 78,5398

oder umgewendet wie 127,32 zu 100.

7.

Wie verhalten sich aber die 2 (Linien-) Umfänge dieser 2 Vierecke? oder ihre Seiten gegeneinander?

Antwort. Sie verhalten sich wie die Halbmesser der 2 Kreise, in welchem sie (die Vierecke) stehen; oder auch wie die Peripherien dieser 2 Kreise. *)

---

*) Einiges über den Beweis hiezu findet sich unten, S. 88.

Nemlich

10,803	zu 9,574	= wie	7,6394	:	6,7702
		oder wie	48	:	42,538
		oder wie	100	:	88,622
	oder umgewendet	wie	112,86	:	100

Recapitulation und Zusammenstellung:

I.

Umfang eines Vierecks = 48. Zolle Jede Seite desselb. = 12	Umfang eines Kreises (als Länge) = 48 Zolle Länge des Quadranten-Bogens = 12
Fläche dieses Vierecks 144 Qu. Zolle	Innere Fläche dieses Kreises 183 Qu. Zoll $34\frac{7}{10}$ Qu. L.
	Durchmess. = 15. Zoll $2\frac{3}{4}$ Lin. Halbmess. = 7. Zoll $6\frac{4}{10}$ Lin.

II.

Umfang eines Vierecks 42 Zoll $5\frac{4}{10}$ Lin. Jede Seite = 10 Z. $6\frac{1}{3}$ L.	Umfang eines Kreises (als Länge) = 42 Z. $5\frac{4}{10}$ Lin. Länge des Quadranten 10 Zoll $6\frac{1}{3}$ Lin.
Fläche dieses Vierecks 113. Qu. Z $9\frac{7}{10}$ Qu. Lin. = 113,097 Qu. Zolle.	Innere Fläche dieses Kreises 144 Qu. Zoll.
	Durchmess. dieses Kreises = 13 Zoll $5\frac{4}{10}$ Lin. Halbm. 6 Zoll $7\frac{7}{10}$ Lin.

8.

Da manche Geometer Verhältnis-Zahlen für den Kreis annehmen, welche unter sich nicht ganz übereinkommen, wie 7 : 22, oder 100 : 314, oder 113 : 355 und welche auch von den oben angeführten abweichen, so werden diese Resultate doch wohl anders ausfallen, je nachdem man rechnet? wie weit zeigen sich diese nun wirklich verschieden?

Antwort. Die Verhältnis-Zahlen 113 zu 355 kommen den oben angeführten am nächsten. Dieses erkennt man daraus, wenn man $\frac{355}{113}$ als einen Decimal-Bruch ausrechnet, welcher $= 3,1415929$ beträgt.

Die ganz ausgemacht schärfere und richtigere Zal ist: 3,1415926.. Die Verschiedenheit ist in der That sehr unbeträchtlich, indem erst in der 7ten Decimal-Stelle abweichende Ziffern anfangen.

Dagegen ist

$\frac{22}{7}$ soviel, als $= 3,142855\frac{5}{7}$

und also eine unleugbar zu große Zal, welche schon in den Tausendtheilchen zuviel giebt, und umgekehrt ist

$\frac{314}{100} = 3,14000..$

offenbar zu klein.

Des bequemen Nenners oder Divisors wegen wird im praktischen Gebrauch die lezte Verhältnis-Zal am meisten angewendet; und wenn es

nicht auf die Schärfe vo Tause d-Theilchen ankommt, so ma an immer die Bequemlichkeit sich erlauben, und dieser Zahlen sich bedienen. Aber der Geometer soll doch die Verschiedenheit der Abweichungen immer kennen, damit er zu beurtheilen im Stand seyn möge, in wie weit er für die Schärfe seines Calküls gut age könne, oder in wie weit andere bei vorgelegten Säzen von der Wahrheit abgewichen seien. *)

Bei Quadrat-Maaßen wird der Unterschied überall bald bemerklicher, als bei Säzen, welche blos das Längen-Maas angehen.

Wer sich die Mühe nimmt, die oben vorgekommenen Angaben mit Anwendung der Zalen (22 : 7) und (100 : 314) durchzurechnen, und die Erfolge seiner Rechnungen mit den vorgetragenen schärfer geführten Rechnungen vergleicht, wird folgende Unterschiede, (neben einander gestellt,) vor Augen sehen:

---

*) Es ist ein wenig bekannter Vortheil, daß man einer Rechnung, welche blos mit der bequemen Zal 3,14 geführt ist, nachhelfen, und sie dem schärfern und richtigern Calkül nähern könne, wenn man das so erhaltene Product, das aus 3,14 und irgend einem Factor dazu entstanden, jedesmal noch mit 1,0005. multiplicirt Diese Nachrechnung ist sehr leicht; u. dadurch bekommt man ein Resultat, das wenigstens nun so scharf ist, als ob man mit 3,141566 . . als Factor gerechnet hätte. Noch näher hin führt die Hülfsgröße 1,000505, als Factor, eben so angewendet.

Verglichene Rechnungs-Säze:

Bei der Verhältnis-Zal 100: zu 314,15926	Bei der Verhältnis-Zal 7 : 22	Bei der Verhältnis-Zal 100 : 314
15,27886	15,2727	15,2866
7,63943	7,6363	7,64331
Das Quadrat	obiger Zalen	
58,3611	58,3140	58,4202
Flächen-Gehalt	des Kreises	(S. 77.)
183,347	183,272	183,439
Die Wurzel	hievon:	
13,5405	13,5978	13,5439
Der Halbmesser	des Kreises	(S. 79.)
6,770275	6,76891	6,77199
Der Kreis-	Umfang:	(S. 79.)
42,5389	42,5474	42,5281
Fläche des	des Vierecks	(S. 80.)
113,096	113,142	113,036

Alle diese Rechnungen sind sehr beschwerlich zu führen, wenn man nicht dabei Logarithmen zu Hülfe nimmt. Will man dieselbe umgehen, und doch mit einiger bedeutenden Schärfe über den Kreis rechnen, so muß man sich sogenannte Einmal-Einse über die Haupt-Zalen machen, d. h.

die Multipla von 1 ... bis 9 der Haupt-Fundamental-Größe: 3,1415926 u. der Zalen 113:355 formiren; dergleichen man auch in verschiedenen Büchern schon vorfindet, (z. B. in J. C. Schulze Taschenb. für Meßkunst am Ende des 1sten Bandes, Berlin 1782.)

Aber es ist zu bedauren, daß so viele Arithmetiker und Geometer sich vor Logarithmen *) so scheuen, und die Vortheile dieser Rechnungsweise verschmähen. Diese fallen nirgends deutlicher in die Augen als eben bei Kreisrechnungen, wenn sie nur etwas genau seyn sollen.

9.

Da man alle Kreisbögen, und alle ganze Kreis-Umfänge nur in Näherung in Zahlen ausdrücken kann, so scheint es, als ob man das Verhältnis von 2 Kreis-Bögen, oder des von 2 Kreis-Umfängen, welche zu 2 verschiedenen Durchmessern gehören,

---

*) Wenn gleich in diesem gegenwärtigen Buch die Rechnung mit Logarithmen vermieden ist, um der größern Zal der Geometer nicht anstößig zu werden, so mögen doch hier, mancher Freunde der Mathematik wegen, welche vielleicht obige Säze nachzurechnen Lust haben, folgende wenigen Logarithmen eingerükt stehen:

Logar. $(\frac{22}{7})$ ist = 0,4973247
Log. (3,14) ist = 0,4969296
Log. (3,14159265 ist = 0,4971499

Der leztere Logarithme ist der richtigere.

niemals ganz bestimmt, sondern nur immer nahehin ausdrücken können?

Antwort. Nein! Dieser Schluß ist nicht richtig. Wenn die Durchmesser oder die Halbmesser von 2 Kreise, bestimmt ausgesprochen sind, u. ein gegebenes gewisses Verhältnis haben, so haben jederzeit die Umfänge dieser zwei Kreise eben dasselbe Verhältnis; und dieses ganz genau nicht blos zu Näherung.

Eben so verhalten sich auch 2 Kreis-Bogen in 2 Kreisen, deren jeder zu einem und demselben Winkel gehört, (z. B jeder zu 30 Grad) ganz wie die 2 Sehnen dieses Winkels, welche doch gewiß zwei ganz bestimmte Linien seyn können.

Manche Geometer wollen freilich dieses nicht recht glauben, und tragen sich mit den Gedanken, man könne darüber nichts gewisses bestimmen], weil man die Quadratur des Zirkels noch nicht gefunden habe, und bis dahin blieben die Angaben aller der Verhältnis-Vergleichungen hierüber noch ungewiß. Allein sie irren sich hiebei sehr; u. ihre Zweifel sind ungegründet. Man muß nur folgendes hiebei wohl erwägen:

Wenn man ein reguläres Hunderteck, als in einen großen Kreis geschrieben annimmt, und ein kleineres solches Vieleck in einem kleineren Kreis, so sind doch gewiß diese 2 Hundertecke ähnliche

Figuren. Man wird also der Proportion gewiß seyn:

100eck	:	zur 100eck	=	wie der	:	zum
Seite in dem	:	Seite in		eine		andern.
einen Kreis		dem andern		Radius		

Diese kleinen Seiten sind Chorden, welche zu einem Winkel gehören; sie verhalten sich also wie bestimmte Zalen ganz gewiß. Zu jeder dieser Seiten gehört ein kleiner Bogen. Jeder solche Bogen ist auf gleiche Weise geschnitten u. konstruirt. Warum sollten sie (die Bogen) nicht ähnlich seyn? warum sollten sie nicht das Verhältnis der kleinen Chorden in den 2 Kreisen haben? Es ist ja eben dieselbe Erzeugung vorhanden. Ist aber die Aehnlichkeit nicht in Abrede zu stellen, so ist gewiß auch ganz ebenderselbe Exponent vorhanden, d. h. der Anzeiger ebendesselben Verhältnisses; Mit andern Worten: die 2 Kreis-Bogen in den 2 Kreisen verhalten sich gewiß ganz, wie die Durchmesser, oder die Halbmesser der angenommenen 2 Kreise.

Anstatt eines Hunderteck kann man sich auch ein Tausendeck eingeschrieben denken; aber auch nur ein Zeheck; nur ein Sechseck; nur ein Dreieck. Die Schlüsse bleiben immer eben dieselbe.

In Zahlen allein kann man freilich blos Näherungs-Verhältnisse verlangen. Wenn z. B. der Halbmesser des einen Kreises 30 Schuh lang ist, so ist sein Umfang = 188,4954.. Und wenn der Halbmesser eines andern Kreises nur 2 Schuh

lang, so beträgt der Umfang dieses Kreises = 125,663. Diese 2 Zahlen verhalten sich gegen einander freilich nicht ganz und gar,

wie 3 : zu 2;

auch nicht, wenn man sie auf noch viel weiter fortgehende Decimalen erstreckt; sondern immer nur

entweder wie 2,999 ... zu 2
oder wie 3 zu 1,999

Allein dieses beweißt nichts gegen die obige Behauptung. Wer das Verhältnis

1 : zu $\frac{1}{7}$

in Decimalen ausschriebe, würde auch nun und nimmermehr eine vollendete Zal erhalten; er wird immer nur erhalten:

1 : 0,14285 ....
oder 1 : 0,14285714 ...

Diese Zahlen können niemals abbrechen, so wenig

als 1 : 3,14159265 ....

wo die Ziffern nach 5, in einem unendlichen Decimalbruch fortlaufen, so wie die in 0,14285 ... und dennoch ist gewiß bei

1 : 0,14285 ...

ein ganz bestimmtes Verhältnis vorhanden, 7 : zu 1, an welchem niemand zweifeln wird.

Wer noch weitere und noch tiefer-eingehende Ausführungen hierüber verlangt, muß sie in Schriften der höhern Geometrie aufsuchen. Hier ist nicht der Ort hiezu!

X.

Ueber das Verhalten runder Stämme, und viereckichter, welche daraus gehauen worden, gegeneinander; und die Berechnung des Abfalls.

Hiezu Fig. IX.

I.

Wenn man aus einem ganz runden Baumstamm einen viereckigten Balken schneidet, so ist die Seite des behauenen Vierecks eine Linie, welche $\frac{7}{10}$tel des Durchmessers betragen soll; (wenn man nemlich an dem behauenen Stamme den Diameter vorher gemessen hat.) Diese Angabe wird von Zimmerleuten öfters so angenommen. Es ist die Frage, ob man sich darauf verlassen könne? und auf welchem Grund sie beruhe?

Antwort. Diese Angabe naht sich der wirklichen Verhältnis-Größe ziemlich; und man kann sich derselben in sehr vielen Fällen bedienen, ohne in merkliche Unrichtigkeiten zu verfallen. Die genauere Zal ist freilich $\frac{707}{1000}$ anstatt $\frac{7}{10}$, wenn der Durchmesser des Kreises als 1 angenommen ist, (als 1 Schuh in Länge). Dieses erkennt man auf folgendem Weg:

Wenn man in einen Zirkel ein reguläres Viereck einschreibt, dessen Winkel den Kreis-Umfang an 4 Stellen berühren, so ist jede Seite des Vierecks als eine Sehne zu 90° gehörig anzusehen. Eine solche Sehne aber hat, wenn der Halbmesser $\frac{1}{2}$ AB = 1 Schuh lang ist, die Länge von $\sqrt{2}$ oder 1,414...

Denn eine solche Sehne ist ja die Hypotenuse, wie BD in der Figur, in dem rechtwinklichten CBD; sie ist als solche nothwendig.

$$\sqrt{CD^2 + CB^2}$$

oder $\sqrt{(1 + 1)}$ das ist $= \sqrt{2}$

Hiebei ist also der Durchmesser AB als 2 Längen-Schuhen gleich angenommen, weil AB = 2 BC ist; und bei dieser Länge ist die Sehne, wie gedacht = 1,414... weil die Qu Wurzel aus der Zal 2 in Decimalen soviel in Näherung beträgt, bis auf zehntausend Theilchen genommen. (Schärfer, noch etwas mehr). Daraus folgt natürlich, daß wenn der Diameter

AB = 20 Schuh wäre
BD = 14, 14 Schuh oder
14 Schuh 1 Zoll 4 Lin.

betragen müßte.

Ist dem aber so, so schließe man rükwärts: Wenn der Durchmesser

AB nur = 10 Schuh wäre

so wird BD nur = 7,07 Schuh lang seyn
oder 7 Schuh, 7 Decim. Linien.

Also, wenn AB nur 1 Schuh lang ist, muß die Sehne BD = 0,707. Schuh betragen, oder nur 7 Decimal-Zolle und $\frac{7}{10}$tel einer Linie drüber; (keine ganze drüber; sonst müßte die Zal 0,710 heißen.)

Diese Sehne ist nun eben die Seite des Balkens, wenn er genau viereckigt gehauen ist.

Es ist leicht abzunehmen, daß in vielen Fällen, wenn nicht große Schärfe nothwendig ist, das Verhältnis 1 : zu $\frac{7}{10}$tel oder 1 : zu 0,7 sich annehmen lasse, weil nemlich in dem Decimalbruch 0,707 in der zweiten Stelle gar kein Hunderttheilchen vorkommt, also keine ganze Linie, wenn 1 = 1 Schuh
oder = 10 Zolle
bedeutet. Indessen muß man die genauere Zal kennen, 0,707.. als den Werth von $\frac{1}{2}$. ($\sqrt{2}$) oder von $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Die Anwendung in andern Fällen, wenn der Durchmesser z. B. 13. Zolle halten sollte, ist nun leicht, indem man so schließt:

10 Zoll : zu 13 = wie 7,07 : zu 9,191
oder 1 : zu 1,3 = wie 0,707 : zu 0,9191

Mit Worten: Wenn der Durchmesser = 1. Schuh 3 Zoll lang ist, so ist die Seite des Balkens 9 Z. 1$\frac{91}{100}$ Linien.

Aus diesem Beispiel sieht man immer soviel, daß derjenige, welcher bei $\frac{7}{10}$ sich beruhiget, und

daraus weiter fort geschlossen hätte, die Seite des Balkens nur 9 Zoll 1 Linie würde gefunden haben *); da sie doch beinahe 9 Zoll 2 Linien in Länge beträgt, indem 9,19 . . . gewiß sehr nahe an 9,20 liegt.

2.

Wenn ein runder Stamm, als ein Cylinder-Stück 1 Schuh hoch angenommen wird, dessen Grundfläche ebenfalls den Durchmesser von gleicher Länge = 1 hätte, und ein viereckigtes Stück Holz heraus gehauen würde, dessen Länge nun auch = 1 Schuh wäre, (oder 10. Zolle hoch, immer in Länge genommen) so wird nach dem Abfall gefragt, nemlich nach dessen Cubischem Innhalt; in Vergleichung mit dem Innhalt des Cylinders. Nach einer Sage soll dieser Abfall $\frac{1}{3}$tel des Cylinders, oder etwas über $\frac{1}{3}$tel betragen. Ist diese Annahme wohl zulässig?

Antwort. Dieser Abfall beträgt in der That mehr als blos $\frac{1}{3}$tel des Cylinders. Man erkennt dieses, wie hier folgt:

Das viereckigte Stück ist kein reiner Cubus, sondern ein länglichtes Stück, ein Parallelopipe-

---

*) Er würde nemlich gerechnet haben:

1 : zu 1,3 = 0,7 : 0,91

oder 10 : 13 = 7 : 9,1

von *). Denn seine Höhe beträgt ja mehr (in Länge) als die Grundlinie seiner Basis, weil die Höhe = 1 Schuh angenommen ist; (die Höhe des Cylinders selbst; die Seitenlinie des Vierecks aber

*) Bei Cubik-Rechnungen behandeln Architekte, Bau-Baumeister, und verschiedene Handwerker den Cubus oft anders als der Mathematiker.
Sie nehmen eine Cubik-Ruthe in 10 gleiche Theile zerlegt, an. Durch Schnitte, mit der Basis parallel geführt, entstehen also zehn gleiche Tafeln; jede ist 1 Schuh hoch; und 10 Schuh lang u. breit. Jede solche Tafel heißt eine Schacht-Schuh. Ein Schacht-Schuh hält also 100 mathematische Cubik-Schuh, insoferne die Cubik-Ruthe 1000 mathematische Cubik-Schuhe hält; und $\frac{1}{10} \cdot (1000) = 100$ beträgt.
Ein $\frac{1}{10}$ dieses Schacht-Schuhs heißt ein Balken-Schuh, unter welchem man sich einen länglichten schmalen Körper zu denken hat, dessen Länge 10 Schuh beträgt, welcher aber nur 1 Schuh breit und dick ist.
Der 10te Theil hievon ist wieder ein rechter Cubus in der Form, und heißt ein eigentlicher Cubik-Schuh.
Man nimmt es aber in verschiedenen Provinzen Deutschlands mit diesen Abtheilungen nicht ganz gleich. (J. W. Marpurg rechnet anders, als Tob. Majer.)
Bei der Cubik-Klafter ist auch eine andere, doch ähnliche Abtheilung angenommen. Ein Cubus, 6 Schuh lang, hoch und tief, wird zum Grund gelegt. Diese Klafter theilt man in sechs gleiche parallele Tafeln ab. Jede ist ein Körper $= \frac{1}{6}$ (216) oder von 36 Cubik-Schuhen . . und einen solchen Körper nennt man ebenfalls
einen Schacht-Schuh.

nur = 0,707 ist wie aus dem vorigen Blatt wohl bekannt ist.

Die Grundlinie dieses Vierecks ist

= $\frac{1}{2}$. Qu. Schuh; weil man

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4}$ oder $\frac{1}{2}$ anerkennen muß; oder

in Decimalen = 0,50. oder 0,500.

Der Cubische Innhalt dieses viereckigten Stams ist nun

die Grundfläche mit der Höhe multiplicirt:

= (0,50) . (1) oder 0,500.

Das ist: Ein halber Cubik-Schuh; oder

500 Cub Zoll.

Hiemit vergleiche man den Cubik-Innhalt des Cylinders. Dessen Basis, die Scheibe (unten) hat

die Fläche = ($\frac{1}{4}$) . (3,14)

genauer = $\frac{1}{4}$ (3,14159 . .)

oder = 0,78539 . . .

oder beinahe = 0,7854

Die Höhe ist wie gedacht = 1. Also der Cubik-Innhalt: (0,7853) . (1)

oder 0,7853 . . . Cubik-Schuhe, welcher Bruch

785,3 . . Cubik-Zolle ausmacht.

Der 12te Theil hievon heißt ein Schacht-Zoll. Darunter versteht man also 3 mathematische Cubik-Schuhe. (Denn $\frac{36}{12}$ beträgt ja = 3.) Also ist 1 mathematische Cub. Schuh = $\frac{1}{3}$tel eines solchen Schacht-Zolls.

Stellt man diese 2 Cubik-Innhalte neben einander, so erkennt man ohne viele Mühe das Verhältnis derselben gegeneinander:

500 : zu 785,3.. = 100 : zu 157,079

Mit Worten: Wenn der Cubik-Innhalt des viereckigten Stücks 100 Cubik-Zolle beträgt, so beträgt der des Cylinders 157,079 (also wenig über 157; nicht ganz $\frac{1}{10}$ Cubik Zolle drüber!)

Der Schluß auf den

Cubik-Innhalt des Abfalls

geht nun ganz leicht hieraus hervor. Dieser würde $\frac{1}{3}$tel genau betragen haben, wenn wir in den 2 lezten Gliedern der obigen Proportion die 2 Zalen

100 : zu 150

erhalten hätten, weil diese genau, wie

1 : zu $1\frac{1}{2}$

oder = 2 : zu 3 sich verhalten.

Allein wir haben ja die Zahlen

100 : 157,079

also 7 Cubik-Zoll über 150, (oder genauer noch 7,079 drüber) Daher beträgt der Abfall mehr als $\frac{1}{3}$tel, nemlich 57,079 Cub. Zolle.

[illegible]ieser Rücksicht ist dann die eine der obigen [illegible] insoferne darinn durch das [illegible]t ist, daß ein Drittel

3.

Läßt sich das Verhältnis des Abfalls nicht füglich in kleineren Zahlen, aber doch genau genug, ausdrücken?

Antwort. Nicht ganz befriedigend; doch kann man folgende Vergleichungen vornehmen:

1 : zu $1\frac{4}{7}$
ist = 1 : 1,5714...
welche Zalen an 1 : 1,5707 immer doch bis auf 1 Tausend Theilchen hinreichen. Die Folgerung möchte daraus dann in Näherung zuläßsig seyn, (da 1 : zu $1\frac{4}{7}$ = wie 7 : zu 11 an sich richtig ist) daß bei Annahme eines Cylinders von 11 Cub. Schuh der Cubik-Innhalt des viereckigten gleich-hohen Stüks 7 Cubik-Schuhe halten, und der Abfall daher 4 Cubik-Schuhe betragen werde.

In solchen Näherungen führt die Kenntniß oder Erinnerung an mehrere oft vorkommende Decimalbrüche jeden Rechner auf eine leichte Weise.

4.

Wie aber? wenn man aus einem solchen Cylinder blos einen Cubus, (einen vollkommenen Würfel) herausschneiden, oder heraushauen wollte? der Abfall würde gewiß grösser ausfallen; wie viel?

Antw. Die Berechnung ist leicht. Der Cubus würde bei Annahme der Seite $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(0,3535) Cub. Schuhe oder 353,5 Cub. Zolle

ausmachen. Denn seine untere Fläche oder ($\frac{1}{2}$) □ Schuhe mit $\frac{\sqrt{2}}{2}$ multiplicirt (mit der Höhe) gäbe das Product

$$(\tfrac{1}{2}\cdot)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ oder } \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ oder } (\sqrt{2})$$

welches = $\frac{1}{4}$(1,414) oder 0, 3535 ist.

Behält man nun den ganzen Cylinder, mit seiner Höhe = 1 Schuh bei, dessen Cubic-Innhalt, wie wir wissen, = 0,7853 Cub. Schuh beträgt, so erhält man mittelst folgender Proportion die Uebersicht zu Schäzung des Abfalls:

$$0{,}3535 : 0{,}7853 = 1 : 2{,}2215$$

oder

$$3535 : 7853 = 100 : 222{,}15$$

Mit Worten: Wenn der herausgehauene Cubus 100 Cubik-Zolle hielte, so wird der ganze Cylinder 222,15 solcher Cub. Zolle betragen. Der Abfall wird diesemnach ziemlich bedeutend viel über die Helfte nun ausmachen, indem er auf 122,15 Cub. Zolle anzunehmen ist.

Bestimmung der Größe des Abfalls, wenn aus einem Cubik-Schuh ein Cylinder von gleicher Höhe gehauen werden soll. (Hiezu Fig. X.)

5.

Wenn ein Cubik-Schuh vorhanden ist, $(AB^3) = 1$, und aus demselben ein Cylinder soll gehauen werden, dessen Höhe der Höhe des Cubus gleich komme $= 1$; wie viel Cub. Zolle fallen ab, oder werden weggehauen?

Antwort. Wenn $AB = 1$ ist, so ist die Fläche des Cylinders (die untere Scheibe) $= \frac{EF^2}{4}$. (3,1415926). Also da $EF = 1$ ist $= 0,78539$, und daher: weil die Höhe ebenfalls $= 1$ beträgt, so hält der Cylinder 0,785398163 Cub. Schuhe oder 785 Cub. Zoll $398\frac{1}{6}$ Cub. Lin. Und der Abfall beträgt daher nothwendig: 0,21460183 Cubik-Schuh, oder 214 Cub. Zoll $601\frac{5}{6}$ Cub. Lin.

Da nun 214,6 : gegen 1000 sehr wenig über $\frac{1}{5}$tel ausmacht, so erhellet, daß man wohl im gemeinen Gebrauch $\frac{1}{5}$tel als den Abfall angeben könne.

Der Cub. Innhalt des Cylinders aber beträgt (0,78539..) des Cubus, welche Zahl zwischen

$\left.\begin{array}{r}\frac{7}{9}\text{tel} \\ \text{und } \frac{11}{14}\text{tel}\end{array}\right\}$ des Cubus

weil $\frac{7}{9} = 0{,}777$

$\frac{11}{14} = 0{,}78571 \ldots$ beträgt.

Wenn also der Cubus 14 Cubik-Schuh halten sollte, so würde der Cylinder beinahe 11 halten (um ein geringes weniger, als 11). Wenn der Cubus eben 100 Cub. Zoll hielte, so würde der Abfall $21\frac{4}{100}$ Cub. Zoll betragen.

Der Abfall gegen den Cylinder genommen, ist aber etwas weniges über $\frac{1}{4}$tel zu schäzen; sehr nahe (0,26 . .)

$$\text{Denn } \frac{0{,}7853981 \,.}{0{,}2146018 \,. \,.} \text{ ist } = 3{,}8386$$

$$\text{Umgew. } \frac{0{,}21460 \,. \,.}{0{,}79539 \,. \,.} = 0{,}26050.$$

Oder, wenn der Cylinder 100 Cubik-Zoll hielte, so würde der Abfall 26 Cub. Zoll betragen. In diesem Fall würde der Cubus selbst $127\frac{1}{3}$ Cub. Zoll halten, oder genauer (127,324) Cub. Zoll; das sind 127 Cub. Zoll 324 Cub. Lin. alles im Decimal-Cubik-Maas.

XI.

Anweisung, den Cubik-Innhalt von Kugeln und Kugel-Abschnitten auf verschiedenen Wegen zu finden.

I.

Auf welche Art berechnet man den Cubik-Innhalt ganzer und halber Kugeln.

Man denke sich das Viereck DMHVV, als eine Ebene, welche um die Linie DM, als eine Axe sich drehe. Dadurch wird ein

Cylinder, GHVM

erzeugt. Der Cubik-Innhalt ist (nach wohl bekannten Säzen)

$= \frac{1}{4} \cdot (VVV)^2 \cdot (3,14 \ldots) \cdot DM$

Das ist: Die Fläche der Scheibe, deren Durchmesser VVV ist, mit der Höhe DM multiplicirt. Ganz eben soviel ist: $DM^3 \cdot (3,14\ )$ Hierauf denke man die Ebene DMVV, als $\frac{1}{4}$tel einer Kreis-Fläche; und lasse diese Ebene gleichfalls um DM sich drehen. Damit wird eine Halbkugel erzeugt. Deren Cub. Inhalt ist $\frac{2}{3}$tel des Cylinders GHVM

also $= \frac{2}{3} \cdot (\frac{1}{4} \cdot VVV^2 \cdot (3,14 \ldots) \cdot DM)$

d. h. $= \frac{1}{6} \cdot (VVV^2 \cdot (3,14 \ldots) \cdot DM)$

und, weil DM $= \frac{1}{2}$ VVV ist, als der Halbmesser des Cylinders, und der Halbkugel, so ist voll-

kommen eben ſo viel: $\frac{1}{12} . (VW)^3 . (3,14..)$; oder auch $= \frac{2}{3} . (DM)^3 . (3,14..)$

Die ganze Kugel iſt deshalb

$$= \frac{4}{3} . DM^3 . (3,14..)$$

im Ausdruk des Halbmeſſers allein, welcher der einfachſte iſt.

Den ganzen Cylinder, in welchem ſie liegend ruht, hat man ſich mit der doppelten Höhe unſerer Figur, alſo mit der Höhe $= 2 . DM$ vorzuſtellen. Deſſen Cubik-Innhalt iſt nun

$$= \frac{1}{4} . (VW)^2 . (3,14..) . (2 . DM)$$

Kürzer $= 2 . (DM)^3 . (3,14..)$. Die ganze Kugel iſt $\frac{2}{3}$tel hievon; das iſt eben $= \frac{4}{3} . (DM)^3 . (3,14..)$

Die Beweiſe dieſer Säze ſtehen in vielen Lehrbüchern: Karſtens, Käſtners, Lorenz, Wucherers, Schnells ...

Manche Geometer geben auch die Vorſchrift: Berechne die Oberfläche der Kugel; ſie hält jederzeit im Quadrat-Maas:

$(VW)^2 . (3,14)$; d. h. $= 4 . (DM)^2 . (3,14..)$

Dieſe Größe multiplic. mit $\frac{1}{6}$ des Diam. VW das Product iſt der Cub. Innhalt der Kugel.	Dieſe Größe nun mit $\frac{1}{3}$ des Halbmeſſers DM.

In beeden Fällen kommt ebendaſſelbe Product heraus:

$$\frac{1}{6} (VW)^3 . (3,14..) = \frac{4}{3} . (DM)^3 . (3,14..)$$

Den Beweis der Formel, welche die Oberfläche der Kugel giebt, findet man in vielen Schriften.

2.

Hat bei Berechnung der Kugel-Abschnitte ein ähnliches Verfahren statt?

Antwort. Es lassen sich vier Vorschriften anführen, nach welchen der Cubik-Innhalt von Kugel-Abschnitten gefunden wird. Es ist gut, daß der praktische Geometer sie alle kenne, wenn es ihm gleich die Beweise von allen zu fassen, an Vorkenntnissen fehlen sollte. Es gehören wirklich dazu Begriffe aus der höhern Geometrie und Analysis.

Die Vorschriften zum Rechnen aber lassen sich alle wohl fassen:

I.) ADC stelle den senkrechten Durchschnitt eines Kugel-Abschnitts vor. Man denke die Ebene eines halben Kreis-Abschnitts DBC, die sich um DB als eine Axe drehe. So wird der Körper erzeugt, dessen Cabik-Innhalt wir nun suchen.

Man muß dabei die Vorstellung eines abgekürzten Conus zu Hülfe nehmen. Dreht sich die Ebene des Dreiecks DMH um DM, so entsteht der Körper eines ganzen Conus, MGH.

Dreht sich blos das Parallel-Trapez DHBo um die Linie DB; so entsteht der Körper des ab-

gekürzten Conus GHno. Dessen senkrechte Höhe ist DB.

Jezt denke man einen Cylinder mit eben dieser Höhe, in unserer Figur: GHFK. Nun folgt die Vorschrift: „Man ziehe von dem Cubik-„Innhalt dieses Cylinders GHFK den abgekürzten Conus ab; der Rest giebt den Cubik-Innhalt des Kugel-Abschnitts ADC.

Ausführung in einem Beispiel:

Der Durchmesser des Cylind. VW sei = 10.
Der Halbm. MW, oder DH = 5′ Schuhe.
Die Höhe BD = 4′; Bo = 1′. Schuh.

Also ist der Cubik-Innhalt

1) des Cylind. = $DH^2 . (3,14..) DB$
hier in Zahlen = $25 . (3,14..) . 4.$

2) des abgek. Conus $[DH^2 + DH . Bo + Bo^2] . (3,14) \frac{1}{3} BD$

in Zalen = $[25 + 5 . (1) + 1] . (3,14..) (\frac{1}{3} . 4)$
Kürzer: $\frac{4}{3} . (31) . (3,14..)$ od. $\frac{1}{3} . (124) . (3,14..)$

Nun folgt *) die Subtraction:

$[25 . 4 . (3,14..)] - [\frac{1}{3} . (124) . (3,14..)]$
oder $(100 - 41\frac{1}{3}) . (3,14..) = (58\frac{2}{3}) . (3,14..)$

*) Den Beweis der angeführten Formel für den abgekürzten Conus, wie auch über die Richtigkeit des ganzen Verfahrens, (welches hier mechanisch gezeigt wird), muß man abermals in ausführlichen Lehrbüchern suchen.

Das Product giebt, wenn man unter (3,14..) die schärfere Zal 3,141592 versteht, den Innhalt des Kugel-Abschnitts ADC = 184,306.. Cubik-Schuh. Wer blos mit der Zal $\frac{314}{100}$ rechnet, wird 184,213.. finden.

3.

Ist es denn durchaus nothwendig, daß man einen abgekürzten Conus zu Hülfe nehme, und zuvörderst berechne, um den verlangten Innhalt des Kugelstüks zu finden? Eigentlich geht doch, wie es scheint, dieser Conus das Kugelstük gar nichts an!

Antwort. Man kann auch diese Beihülfe der Conus-Rechnung umgehen, wenn man blos auf die praktische Operation sieht; zum Beweis aber dient die Vorstellung des Conus sehr; — man müßte dann höhere Analysis anwenden.

Diese gehört nicht hieher! — Es soll also sogleich die

IIte Vorschrift (zum praktischen Gebrauch)

gesezt werden. Sie heißt so:

1) Miß den Halbmesser der Kugel, zu welcher das vorgegebene Kugelstück gehört; hier DM oder DH = 5.

2) Ziehe davon $\frac{1}{3}$tel der Höhe DB ab;

3) Multiplicire den Rest (DM — $\frac{1}{3}$ DB) in das Quad. der Höhe; in DB^2.

4) Das Product multipl. noch mit (3,14.)

Diese drei Faktoren geben im Product den verlangten Cubik-Innhalt kurz, es ist:

$$= (DM - \tfrac{1}{3} DB) . (DB)^2 . (3{,}14 .)$$

Hier $= (5 - \tfrac{1}{3} . 4) . 16 . (3{,}14 ...)$

d. h. $\tfrac{11}{3} . 16 . (3{,}14 ...) = \tfrac{1}{3} (176) . (3{,}14 ..)$

Das Resultat ist das vorige: $(58\tfrac{2}{3}) . (3{,}14 ..)$

oder: 184,306 Cub. Schuhe. *)

IIIte Vorschrift.

Man kann den Durchmesser der ganzen Kugel, und den Halbmesser derselben VV und DM ganz weglassen, und blos mit den 2 Linien BC u. DB, in Verbindung mit (3,14 ..) die Rechnung führen, und den verlangten Innhalt des Kugelstücks doch darstellen. Und dieses ist in Praxi sehr vortheilhaft!

Die Vorschrift ist:

1) Man messe die Linie BC, den Halbmesser der Scheibe des Kugelabschnitts selbst.

2) Formire alsdenn folgende zusammengesezte Größe:

$$\tfrac{1}{2} \left(\frac{BC^2}{DB} + \tfrac{1}{3} DB \right)$$

*) Man findet in vielen Schriften die Formel: $Z = (3{,}14 ..) xx . (a - \tfrac{1}{3} x)$; wo a den Halbmesser der Kugel bedeutet; hier unser DM und x, die Höhe des Abschnitts; unser DB. Diese Formel ist also unserer Vorschrift gleichlautend. Die Factoren stehen nur in anderer Ordnung.

In unserm Fall wird in Zahlen *) stehen:

$\frac{1}{2} \left(\frac{24}{4} + \frac{1}{3} . 4 \right)$ od. $\frac{1}{2} . \left(6 + \frac{4}{3} \right)$

In Kürze $\frac{22}{6}$ oder $\frac{11}{3}$.

3) Diese Größe multiplic. nun wieder mit $(DB)^2$ (3,14...) ganz, wie nach der IIten Vorschrift. Der Erfolg ist ebenderselbe: Das Product ist $(58\frac{2}{3})$. (3,14...) oder 184,306.. wie oben.

4.

Wenn dem so ist, so muß ja die zusammengesezte Größe

$\frac{1}{2} . \left(\frac{BC^2}{DB} + \frac{1}{3} DB \right)$ ganz und gar der in der

IIten Vorschr. angeführten $(DM - \frac{1}{3} DB)$ gleich seyn? — Läßt sich dieses nicht ohne beschwerliche Ausführungen darthun?

Antwort. Die Ueberzeugung, daß der innere Gehalt dieser Formeln gleich sei, läßt sich bald beibringen: Man denke nur an die Geseze des Kreises, welchen gemäs

DB : zu BC = wie BC : (2 DM — DB)

seyn muß, so daß das 4te Glied den Werth hat:

$$\frac{BC^2}{DB} = (2 . DM - DB).$$

Diese lezte Größe ist, als Linie, in der Fig. XIV. zwar nicht ganz zu sehen. Aber wenn man

---

*) Daß in Zahlen hier $BC^2 = 24$ gelte, wird auf dem nächsten Blatt deutlich dargethan werden. $BC = \sqrt{24}$ folgt daraus. Man braucht in der Rechnung aber diese Wurzel diesmal nicht.

den Diameter des Kreises = 2 . DM sich denkt, (als = 2 . rad.), so muß man doch wohl erkennen, daß (2 DM — DB) das 2te grössere Stück des Diameters, das Ergänzungs-Stück zu DB sei. Ist nun dem so, so ist auch gewiß (nach einfacher Buchstaben-Rechnung) $\left(\frac{BC^2}{2 . DB} + \frac{DB}{2}\right) = DM.$

Diesen Werth schreibe man in den Factor (DM — $\frac{1}{3}$ DB), den wir aus Vorschr. II kennen; und seze also so: Es ist

$$DM \quad - \tfrac{1}{3}\,DB$$
$$= \left(\frac{BC^2}{2 . DB} + \frac{DB}{2}\right) - \tfrac{1}{3}\,DB)$$

oder $\left(\frac{BC^2}{2 DB} + \frac{DB}{6}\right)$ oder $\frac{1}{2}\left(\frac{BC^2}{DB} + \frac{1}{3}\,DB\right)$

Hiemit ist die Behauptung erwiesen. Auch kommt, wie gedacht, in Zahlen, ganz, wie oben, $\frac{11}{3}$, zum Vorschein, weil $BC^2 = 24$ hier beträgt. *)

Gewiß ist daher die IIIte Vorschrift in der Formel dargestellt, richtig:

$$= \tfrac{1}{2} . \left(\frac{BC^2}{DB} + \tfrac{1}{3}\,DB\right) . DB^2 . \; (3{,}14 ..)$$

---

*) Nemlich, der Gleichung des Kreises gemäs, ist:
$BC^2 = DB . (2 . DM - DB)$
In Zahlen hier $= 4 . (10 - 4)$
welches 4 . 6 oder = 24 ausmacht.
Daher die Linie $BC = \sqrt{24}$ hier seyn mus.
In Decimalen = 4,898979 ..

Man kann sie auch noch anders umgestalten. Es bleibt aber immer der Werth

$$= (DM - \tfrac{1}{3} DB) \,.\, (DB)^2 \,.\, (3{,}141..)$$

IVte Vorschrift.

Wer die krumme Oberfläche des Kugelabschnitts einzeln berechnet, (ehe er an den Cubik-Innhalt selbst geht), wird deren Quadrat-Maas jederzeit *) mittelst der 3 Factoren finden:

$$(3{,}14..) \,.\, (DB) \,.\, (2\, DM).$$

Wird nun die Helfte dieses Products genommen, nemlich die 3 Factoren $(3{,}14..)$ $(.DB)$. (DM), und ein 4ter dazu formirt:

$$\left(DB - \tfrac{1}{3} \,.\, \frac{DB^2}{DM}\right)$$

o giebt das Product dieser 4 Factoren den Cubik-Innhalt des Kugelstücks.

In Zahlen findet man hiernach:

$$(3{,}14..)\,4\,.(5)\,.\,(4 - \tfrac{1}{3} \,.\, \tfrac{15}{5})$$

d. h. $(3{,}14) \,.\, 20 \,.\, \frac{44}{15}$ oder $(314..) \,.\, \frac{1}{3} \,.\, (176)$ welches wieder die obige Zal = 184,306 hervorbringt.

Daß die 4 Factoren nicht mehr, als die drei: $(3{,}14..) \,.\, (DB)^2 \,.\, (DM - \tfrac{1}{3} DB)$ betragen, ersieht man ohne Mühe recht allgemein, wenn man in dem diese IVten Vorschrift gemäs aufgestellten Product:

---

*) Den Beweis suche man in den oben angeführten Schriften gelehrter Geometer.

$$(3{,}14..)(DB).(DM).\left(DB - \frac{1}{3}\,\frac{DB^2}{DM}\right)$$

den lezten Factor unter einen Nenner bringt. Damit hebt sich DM; und man kommt auf 3 Faktoren zurük:

$$(3{,}14..)\,(DB).\,(DB\,.\,DM - \tfrac{1}{3}\,.\,DB^2)$$

Das ist aber eben so viel, als

$$(3{,}14..).\,(DB)^2.\,(DM - \tfrac{1}{3}\,DB);$$

die Haupt-Formel der IIten Vorschrift.

Offenbar hat diese IVte Methode Beziehung auf das oben S. 102. angeführte Verfahren, den Cubik-Innhalt der ganzen Kugel mit Anwendung der schon berechneten krummen Oberfläche zu finden. Sie ist gar nicht zu verwerfen. Man erhält doch damit die Oberfläche und den Cubik-Innhalt des Kugelstücks schnell neben einander *).

---

*) In einer sehr schäzbaren Sammlung Stereometrischer Formeln von Hrn. M. Essich, zu Stuttg. 1811. herausgegeben, steht Nr. 46 eine hierher gehörige Formel: $(0{,}523599).H.(3\ R^2 + H^2)$, welche in unserer Bezeichnung so heissen würde: $\frac{1}{6}\,(314..).\,DB.\,(3\,.\,BC^2 + DB^2)$. Diese Factoren geben ganz das Product der unserigen, welche die IIIte Vorschrift p. 106. enthält, und welche p. 108 (unten) steht. Die Umbildung verschieden-aussehender Formeln, welche doch gleichen innern Werth haben, ist eine sehr nüzliche Uebung.

XII.

Vergleichung elliptischer Flächen mit Kreis-Flächen; und Anweisung die erstern zu berechnen.

1.

In welcher Verbindung stehen die Flächen-Berechnungen von Kreisen und von Ellipsen; oder Ovalen?

Antwort. Zuerst ist zu erinnern, daß mit Unrecht der Figur einer Ellipse öfters im gemeinen Sprach-Gebrauch die Benennung eines Ovals gegeben wird.

Die Oval-Linie hat an beeden Seiten des großen Durchmessers (gegen das Ende hin) zwei verschiedene Krümmungen; und ihre Construction und Berechnung gehört in die höhere Geometrie und Analysis. Die Ellipse aber hat an den 2 Enden des großen Durchmessers, oder der großen Axe ganz gleiche Krümmung; und am Ende der kleinen Axe ebenfalls gleiche Krümmung, welche nur immer flächer (weniger eng-gewölbt) ist, als die an den Enden der großen Axe.

Wie die Ellipse mit dem Kreis zusammenhängt, erkennt man am besten durch fleisige Ansicht solcher Figuren, wie Fig. VII u. VIII. hier

mitgetheilt sind, indem man dabei folgendes sich merkt:

Wenn ein Halb-Kreis und eine halbe Ellipse so zusammen geordnet werden, wie in Fig. VII, so verhält sich jederzeit die Fläche des Halbkreises AMB zu der Fläche der halben Ellipse AHB wie die große Halb-Axe Ap, (welche eine beeden Figuren gemeine Linie ist) zur kleinen Halb-Axe Hp; (welche Linie die Ellipse allein angeht nicht den Kreis.)

Kurz, die Proportion findet statt:

AMB : AHB = wie Ap : zu Hp
. . . . . also auch = 2 . Ap : 2 Hp

(wie die ganze große Axe zur kleinen). Und so kann man auch sezen:

Der ganze Kreis zur ganzen Ellipse verhält sich, wie 2 Ap zu 2 . Hp.

Der praktische Geometer, welcher auf höhere Geometrie, und Analysis sich nicht einläßt, muß dieses angegebene Gesez als einen gewissen, genug bewährten Erfahrungs-Saz *) annehmen; und als richtig anerkennen.

---

*) Wer den Beweis selbst gern genau einsehen und fassen möchte, wird ihn in vielen gelehrten Schriften finden. Die Kenntnis der sogenannten Kegelschnitte, oder doch die der Ordinaten-Gleichung der Ellipse wird dabei vorausgesezt. Man sehe Kästners Anal. Endl. Größen §. 362 .. §. 382. De la Chapelle von Kegelschnitten; auch Robert Simpsons Werk von Kegelschnitten von Hrn. Prof. Camerer mit Zusäzen herausgegeben.

Durch die Annahme desselben lassen sich sogleich, mittelst Beiziehung weniger ganz leichter geometrische Hülfs-Säze, sehr brauchbare Wahrheiten erkennen.

Man stelle die 4 Glieder der Proportion so hin:

Ap : zu Hp = AMB : zu AHB

Das 4te Glied ist also gewiß

das Product der mittl. Gliedern dividirt durch Ap;

oder: $\frac{(Hp) . (AMB)}{Ap}$ ist = AHB.

und man sieht hieraus, daß sich die halbe Fläche der Ellipse AHB jederzeit durch den Halbkreis, und durch die 2 Axen, oder Halb-Axen ausdrüken lasse.

Erläuterung durch ein Beispiel in Zahlen:

Der Durchmesser AB (oder 2 Ap) sei = 12 Schuh und der kleine (2 Hp) sei = 8.

Der Kreis, dessen Durchmesser 12 ist, wird die Fläche: $\frac{1}{4}$. (144) . (3,14159 ...) haben, oder = (36) . (3,14 ..) betragen; d. h. = 113,0973 .. und AMB ist die Helfte.

Also wird hier stehen:

Ap : Hp = AMB : AHB,

$\frac{1}{2}$. (12) : $\frac{1}{2}$ (8) = $\frac{1}{2}$ (113,0973) : 37,6991 ..

Das lezte Glied ist die Fläche der halben Ellipse.

Wäre Hp länger, d. h. wäre die kleine Halb-Axe grösser, so würde AHB eine grössere Fläche seyn; dieses ist einleuchtend. Man lasse in Gedanken die Linie Hp zunehmen, von H gegen M hinauf, nothwendig wird man damit immer grössere und grössere Halb-Ellipsen erhalten, so daß es Halb-Ellipsen geben muß, welche dem Halb-Kreis ganz nahe kommen.

Das Gesez der angeführten Verhältnisse bleibt aber immer eben dasselbe; nur das 2te Glied der Proportion würde damit grösser angenommen; also würde auch AHB grösser; das 1ste und 3te Glied aber blieben bestehen. Z. B. Hp wäre = 11 Schuh, so wäre nun die Rechnung:

$\frac{1}{2}(12) : \frac{1}{2}.(11) = \frac{1}{2}.(113,0973\ldots) : 51,8362$

2.

Hiebei ist doch der Saz noch nicht ausgedrükt, welchen man von vielen Praktikern, die gewiß der Analysis nicht kundig sind, oft genug hört: „daß „der Durchmesser eines Kreises die geometr. Mittel-„proportionale zwischen der großen und kleinen Axe „einer Ellipse sei, welche mit dem Kreis gleiche „Fläche habe! — Dieser Saz ist doch wohl gegründet?“

Antwort. Er ist recht wohl gegründet; und er läßt sich auch recht gut, eben mit Hülfe unserer aufgeführten Proportion erweisen. Man erwäge nur folgendes:

Wir sind befugt, nach obigem zu sezen:

$Ap : Hp = 2 . AMB : 2 AHB$

Auch $= (Ap)^2 . (3{,}14) : \frac{(Ap^2 . Hp . 3{,}14 ..)}{Ap}$

Das dritte Glied ist so viel als $(\frac{1}{4}) . AB^2 (3{,}14)$ nach wohl bekanntem Gesez der Kreisrechnung.

In dem 4ten Glied hebt sich $(Ap^2 : Ap)$ zu Ap also heißt es kürzer gefaßt: $Ap . Hp . (3{,}14 ..)$ und stellt die Fläche der ganzen Ellipse dar.

Wird nun vorausgesezt, oder angenommen, eine gewiße Ellipse solle der Fläche eines gewissen Kreises gleich seyn, so kommt dieser Kreisfläche allgemein der Ausdruck zu: $= \frac{1}{4} . dd . (3{,}14 .)$. oder $r^2 . (3{,}14 ..)$.

Dieses muß man wohl zugestehen; d mag eine Zal seyn, welche sie will, wenn sie nur einen Kreisdiameter vorstellt, oder angeht; und so auch $\frac{1}{2}$ d oder r. d. h. der Radius dieses Kreises; welchen wir jezt noch nicht in Zahlen oder in Messung kennen; wir werden ihn aber sogleich kennen lernen. Denn, wenn die Annahme oder Forderung fest bestehen bleibt:

„die Ellipsen-Fläche soll einer gewissen
„Kreisfläche gleich seyn;

so hat diese Behauptung gar keinen andern Sinn, als

„die Ellipsen-Fläche: $(Ap) . (Hp) (314 ..)$
„soll der Kreis-Fläche $(r^2) . (3{,}14 ..)$ gleich
„seyn.

Also (Ap.) (Hp) (3,14..) = r^2. (3,14..) stehen als Aequivalente. Nun kann der Factor (3,14..) welcher rechts und links steht, ganz weg bleiben, und die Gleichung bestehet gewiß noch für sich; nemlich (Ap). (Hp) ist = r^2 od. = $\frac{1}{4}$ dd.

Ist aber dem so, so kann man aus diesem Product Ap und Hp, und aus dem Quadrat von r (wie jederzeit in der gemeinen Arithmetik), vier Glieder einer geometr. Proportion bilden, welche so heissen müssen:

Hp : zu r = wie r : zu Ap

weil das Product der äussern Glieder auf diese Art = (r . r) herauskommt. Man spreche nun nur, was in den 4 Gliedern steht, mit Worten aus, so heißt dieses so viel:

r ist die geometr. Mittel-Proportionale zwischen Hp und Ap; oder:

„der Halbmesser des Kreises, mit r beschrie-
„ben ist die geometr. Mittel-Proportionale
„zwischen den 2 Halb-Axen der dem erwähn-
ten Kreis gleich großen Ellipse.

Natürlich ist also auch 2 r oder d, der Kreisdiameter, die geometr. Mittel-Proportionale zwischen 2 Hp und 2. Ap oder zwischen der großen und kleinen Axe, der dem Kreis gleichen Ellipse

2 Hp : 2 r = 2 r : 2 Ap

oder 2 Hp : d = d : 2 Ap

Das ist dd = (2 Ap . 2 Hp).

Also d = $\surd$ (2 Ap . 2 . Hp).

d. h. = 2. $\surd$(Ap . Hp).

Auf diese Art ist man daher ganz auf den oben angeführten Saz, (welchen man so oft hört,) hinaus gekommen. Man erkennt aber jezt hiemit deutlich, wie man dazu gelange!

Geometer, welche von Buchstaben-Rechnung nichts wissen wollen, werden gewiß entweder gar nicht, oder äusserst mühselig ihre erwähnte Behauptung darzuthun im Stande seie.

Uebrigens ist noch zu erinnern, daß man in unsern 2 Figuren VII u. VIII keinen Kreis, welcher einer ganzen oder halben Ellipse gleich wäre, suchen müsse. Die Halb-Ellipse ist ja hier allemal kleiner, als der Halbkreis gezeichnet; und diese Zeichnung ist also nicht dazu geeignet, daß man unsere gegenwärtig erläutertes Problem gleichsam mit Augen vor sich sehen sollte oder könnte. Dazu mag, wer Lust hat, sich eigene Zeichnungen entwerfen. Die Säze in dem Vortrag S. 111 bis 113. führen dazu hin; man darf sie jezt nur anwenden *).

*) Anwendung in Zalen: Die große Axe einer vorgegebenen Ellipse sei = 40 Schuh lang, die kleine 30; Es werde nach dem Durchmesser eines Kreises, der gleiche Fläche mit dieser Ellipse haben soll, gefragt. Hier ist $d = 2 . \sqrt{(20 . 15)}$ oder $2 \sqrt{(300)}$; weil jezt $Ap = 20$ beträgt; $Hp = \frac{1}{2}(30)$ oder 15. Es ist aber $2 . (\sqrt{300})$ so viel, als 34,640 . . . Also r, der Halbmesser = 17,320. Mit diesem Halbmesser beschreibe man einen Kreis. Dieser hat zuverläßig die verlangte Größe der vorgegebenen Ellipse.

3.

Giebt es denn auch Mittel, kleinere Stücke einer ganzen Ellipse, z. B. eine Fläche, wie AMS, mit dem zugehörigen Kreis=Stük ANS, auf ähnliche Weise, wie ganze Ellipsen, und ganze Kreise, zu vergleichen? Fig. VIII.

Antwort. Diese Vergleichung fällt ganz so aus, wie die schon angeführte, bei ganzen Kreisen, und ganzen Ellipsen. Es ist

AMS : ANS = wie Hp : Ap

und daher wird das Ellipsen-Stück durch einen einfachen Regel de Tri Saz gefunden:

„man multiplic. ANS mit der kleinen Halb-„Axe, und divid. durch die große Halb-Axe.

$$\frac{Hp . (ANS)}{Ap} \text{ ist } = AMS$$

Den Beweis dieser Behauptung muß man abermals in Schriften der höhern Geometrie suchen. Der Praktiker kann sicher die Richtigkeit dieser Angabe annehmen; und es liegt ihm also nichts ob, als daß er in jedem einzelnen vorkommenden Fall den halben Kreisabschnitt ANS berechne, weil dieser ein wesentliches Stück des Quotienten $\left(\frac{Hp . ANS}{Ap}\right)$ ist.

Die Figur zeigt sogleich, daß ANS so viel als (ANp — △ NSp) bedeute; d. h. die Differenz eines Kreisausschnitts, oder Sectors ANp; und des

rechtwinklichten Dreiecks sei, dessen Höhe = NS, die Basis = Sp ist. Diese Stücke muß man kennen. Es gehört offenbar nichts, als die einfachste Kenntnis der Kreis-Rechnung hiezu, um dieses auszuführen *). Der Kreisbogen AN muß gegeben seyn (in Grad. Min. .. ausgesprochen) und der Halbmesser Ap. Damit findet man die Fläche des Sectors auf wohl bekannte Weise. Alsdenn zieht man das berechnete △ NSp ab; und ist eben damit am Ziel; man hat nun ANS, und verfährt zum Schluß nach der Formel, oder der angeführten geometr. Proportion gemäs.

4.

Kann man dann auch in der Anwendung mehrern Gebrauch von diesen Säzen machen?

Antwort. Stücke elliptischer Flächen kommen gar oft vor, in Bau-Messungen von allerlei Art; auch bei vielen Gefäßen; insbesondere noch in Ausmessungen von Fässern, deren Krümmung man meistens elliptisch annehmen kann.

Eine Fläche, wie MS Hp, ist als der 4te Theil eines Faß-Durchschnitts anzusehen; und man erkennt die Figur ohne Mühe als passend. Wenn man eine solche Fläche sich vorstellt, wie sie sich um die Linie Sp als um eine Axe drehte, so

---

*) Man wird unten S. 129. doch eine Anweisung in einem Beispiel in Zahlen antreffen, wie man sich hiebei zu benehmen habe.

wird man zugestehen, daß ein Körper dadurch erzeugt werde, welcher als die Hälfte eines Fasses sich ansehen läßt. Wer daher die Fläche eines Stücks, wie MS Hp berechnen kann, wird damit die hauptsächlichste Vorarbeit zu der Calculation einer Faßberechnung zu Stande gebracht haben.

5.

Die Vorstellung hievon geht an sich, wie es scheint, wohl von statten; allein bei einem Faß erhält man zwar (mit der Spunden-Tiefe) die kleine Axe der Ellipse, oder 2 Hp; die große Axe der Ellipse aber AB, ist doch niemals selbst vorhanden, oder mit einem Faß zugleich gegeben, sondern nur, ein Stück derselben, die Linie Sp, welche jederzeit um AS kürzer, als $\frac{1}{2}$ AB, die Helfte der großen Axe ist.

Antwort. Dieser Einwurf ist an sich richtig. Allein hiebei kommt uns die nähere Kenntnis der ganzen Beschaffenheit jeder Ellipse, deren Construktion, und die Analysis darüber zu Hülfe. Nach dieser kann man die große Axe in jeder Ellipse finden, wenn man die kleine Axe, oder deren Helfte, hier Hp, und dazu noch zwei solche Linien, wie MS und Sp hier sind, kennt. Deren Längen kann man aber bei jedem Faß messen. Die Analysis beweißt uns *) nun, daß allemal

*) Aus der Ordinaten-Gleichung der Ellipse, und deren Umwendung ist dieses leicht darzuthun, wenn man nur die Theorie der Ellipse gehörig studieren mag. Die Abscissen sind bei der nachfolgenden For-

die Gleichung statt habe:

$$\frac{Hp \cdot Sp}{\sqrt{[(Hp + MS) \cdot (Hp - MS)]}} = Ap$$

und daraus ist ersichtlich, daß sich Ap, die Helfte der großen Axe durch Hp, Sp, MS, vollkommen ausdrücken lasse.

Mit Ap kennt man nun den Halbmesser zu einem Kreis, welcher oben r geheissen hat. Man kann also den Halbkreis über 2 Ap oder AB beschreiben; diesen darauf mit der halben Ellipse vergleichen; und demnächst auch die Berechnung der Flächenstücke ANS und AMS vornehmen. Alles hängt aufs genaueste zusammen.

Umständlicher und mit allen gehörigen Gründen läßt sich Geometern, welche in Algebra und in der Theorie der Kegelschnitte nicht gut geübt sind, die Ausführung hierüber nicht vortragen. Es ist genug, daß sie den Weg kennen lernen, wie man die Ausmessungen solcher Flächen mechanisch vornimmt, und die Einsicht bekommen; wie dieselbigen mit den Kreisberechnungen zusammenhängen.

---

mel vom Mittelpunkt genommen nicht vom Scheitel an. S. Kästn. Anal. Endl. Größe §. 368.

XIII.

Gewölb-Rechnungen bei ungleicher Dicke an der Strebmauer und am Schluß-Stein.

I.

Wie berechnet man den Cubik-Innhalt eines Gewölbs, welches unten an der Strebmauer dicker ist, als oben am Schluß-Stein?

Antwort. Es können hiebei verschiedene Fälle vorkommen: Erstlich, wenn die innere Weite und Höhe so beschaffen ist, daß die Höhe mp genau halb so gros als cd, die Linie der Weite ist; wo man die Fläche der inneren leeren Gewölbs, als einen Halb-Kreis anzusehen, und zu berechnen hat.

Wenn z. B. in Fig. XI. cd = 8 Schuh wäre, mp = 4; so würde die Fläche des Halb-Kreises cmd = $\frac{1}{2}$ $(4)^2$. (3,1415..) betragen; oder (8) . (3,1415..) = 25,1327.

Die krumme Linie des äussern Gewölbs kann in diesem Fall nun sehr oft, als eine halbe Ellipse angesehen werden. Wenn die Linie der Dicke an der Strebmauer = 2 Schuhe betrüge, die Linie der Dicke oben am Schluß-Stein aber nur = 1 Schuh, so muß man sich

AB als die große Axe einer Ellipse denken,
np, als die Helfte der kleinen Axe,
und die Längen in diesem Fall so hinschreiben

$$Ap = Ac + cp$$
$$2 + 4 \text{ ist} = 6$$
$$np = mp + mn$$
$$= 4 + 1 \text{ ist} = 5$$

Und nun berechnet man die Fläche der halben Ellipse: AnB

Die der ganzen ist allgemein (Ap . np . 3,1415 . .) nach der Theorie der Ellipse, in so ferne die Linie 2 Ap die große Ellipsen-Axe heißt; und 2 np die kleine.

Daher denn hier

(6 . 5) . (3,14159 . .) oder (30) . (3,14159 . .) Die Fläche der ganzen Ellipse wäre; d. h. 94,247 . . Quadratfuß

Und daher die Fläche der halben Ellipse:

AnB = 47,123 . . .

Von dieser Fläche hat man die des Halbkreises abzuziehen; um die Fläche des runden Streifens AnBdc zu erhalten

47,123
25,137

21,980 Quadrat Schuh ist die Fläche des Streifens.

Dazu nun muß man blos auch die Länge des Gewölbs noch kennen, und, wenn solche z. B.

24 Schuh betrüge, diese Zal mit 21,086 multipliciren. Das Product giebt den gesuchten Cubik-Innhalt des ganzen Gewölbs, z. B.

(21,986) . (24) ist = 527,66

und daher hält das ganze Gewölb

$527\frac{2}{3}$ Cubik-Schuhe.

So ist also das Problem in diesem Fall gelöst.

2.

Aber, wie wenn das innere Gewölb kein Halb-Zirkel wirklich wäre? Wenn das Gewölb innerhalb elliptisch gebaut wäre?

Antwort. Das ist der zweite Fall, welchen man ins Auge fassen muß. Man nehme an: *) mp sei = 4; cp sei = $3\frac{1}{2}$; und cmd die krumme Linie einer halben Ellipse.

Die äussere Linie AnB sei nun ein halber Zirkel; Ac sei = 1 Schuh, die Dicke der Streb-Mauer: nm sei = $\frac{1}{2}$ die Dicke am Schlußstein; so ist Ap nothwendig = 1 + $3\frac{1}{2}$ = $4\frac{1}{2}$; und der Durchmesser AB ist also = 9.

Hier erhält man die Fläche des runden Streifens leichtbegreiflich dadurch, daß man von der Fläche des Halb-Kreises die der halben Ellipse abzieht.

Bei der halben Ellipse ist hiebei nur wohl zu

*) Hiezu ist in unsern Figuren keine besondere Zeichnung vorhanden. Man kann sich dieselbe aber nun nach diesen Angaben gar leicht selbst entwerfen.

merken, daß hier eine sogenannte überhöhte Halb-Ellipse vorkomme, bei welcher 2 . mp die große Axe ist; und cd die kleine, indem mp = 8 hier angenommen ist;

cp aber = $3\frac{1}{2}$; also cd = 7.

Die Fläche der ganzen Ellipse wird aber nach eben derselben allgemeinen Formel: (Ap . np . 314 . .) berechnet; und ist daher jezt

$$(4.)\ (3\tfrac{1}{2})\ (3{,}1415\ldots)$$

d. h. (14) . (3,1415) oder (43,9822)

Also die Helfte der Ellipse ist = 21,9911 Qu. Schuhe.

Die Fläche des Halbkreises aber ist

$$= \tfrac{1}{2}\left(\frac{9^2 \cdot 3{,}1415}{4}\right) = \left(\frac{81}{8}\right) \cdot (3{,}1415) = 31{,}808$$

Hievon ist also die halbe Ellipse zu subt. 21,991

so bleibt die Fläche des Streifens = 9,817

Wenn nun die Länge des ganzen Gewölbs 20 Schuhe betrüge, so würde der Cubik-Innhalt seyn = (9,817) . (20) = 196,34 . .

das heißt $196\frac{1}{3}$ Cub. Schuhe.

3.

Hiebei ist nun immer angenommen, daß eine der beeden Gewölbskrümmungen elliptisch wäre; entweder die innere oder die äussere. Können denn aber nicht beede circularisch seyn, d. h. wirkliche Zirkelbögen?

Antwort. Sie können es seyn; aber der

äussere Gewölb-Bogen kann in diesem Fall kein ganzer Halb-Kreis seyn; sondern muß weniger als 180° betragen; der innere aber kann wohl 180° seyn; wenn nehmlich wirklich die Dicke an der Strebmauer mehr (in Länge) ausmacht, als die am Schlußstein. Man sehe nur eine Figur an, welche hiezu passend ist Fig. XII.

Man muß den innern Halb-Kreis hinaufgerükt denken von P nach p.

Der äussere Gewölbbogen geht von cn bis nd; und dieser ist in dem Bau selbst vorhanden; nicht aber An + nB. Diese zwei Bögen sind in diesem Fall nur fingirt, nur in Phantasie vorhanden, anzunehmen, oder nur als Hülfs-Bogen zur Rechnung beizuziehen.

4.

Wie ist dann aber nun die Rechnung wirklich vorzunehmen?

Antwort. Da cn, der äussere Kreisbogen jezt nicht 90° erreicht, so muß man den Bedacht darauf nehmen, zu erfahren, wie viel kleiner dieser äussere Bogen sei? d. h. man muß den Bogen cPn messen, um den Betrag des Winkels am Centrum cPd, oder zuerst dessen Helfte, hier cPn zu erfahren.

Diese Messung kann nun entweder unmittelbar vorgenommen werden, (mittelst eines Winkelmessers); oder, was viel leichter und bequemer

ist, man kann den Winkel aus dem Halbmesser Pc und der halben Sehne cp berechnen.

Wer nicht Trigonometrie oder geometrische Constructionen versteht, hilft sich wohl durch Zeichnen, indem er ein rechtwinklichtes Dreieck cPp aufträgt, und mit dem Halbmesser cP oder AP einen Quadranten beschreibt.

Aber viel sicherer und schneller geht das Verfahren, wenn man cp als eine halbe Chorde ansieht, welcher zu dem Winkel cPp gehört.

Ein Beispiel in Zahlen sei folgendes hierüber:

Man nehme an: Die Strebmauer-Dicke ca = 2 Schuh; die Höhe am Schlußstein oben nm = 1 Schuh. Die innere Höhe mp = 4; und ap ebensolang, weil mp und ap Halbmesser eines Kreises sind.

Nun ist cp so viel, als (ca + mp) od. (2 + 4) = 6. Der grössere Halbmesser cP oder AP = $6\frac{1}{10}$ Der Durchmesser 2 AP oder AB = 12, 2 Schuh und Pp = $1\frac{1}{10}$ oder 1, 1. Denn nur so kommt Pn = cP als $6\frac{1}{10}$ Schuh lang heraus, in dem die Summe

$$\left.\begin{array}{l}(nm + mp + Pp) \\ \;\;1 + \;\;4 \;\;+ 1{,}1\end{array}\right\} = 6\tfrac{1}{10} \text{ giebt.}$$

Auch ist geometrisch genommen,

$$Pp = \sqrt{(cP^2 - cp^2)} = \sqrt{[(6{,}1)^2 - 6^2]}$$

oder $\sqrt{(37{,}21 - 36)}$ d. h. $\sqrt{(1{,}21)} = 1{,}1$.

Nun folgt die Berechnung des Kreis-Ausschnitts selbst:

Calkül bei der Annahme r = $6\frac{1}{10}$ Schuh. Es seien Sehnen-Tafeln für einen Halbm. von 100 Schuh Länge vorausgesezt. Unser Kreis mit r = 6,1 wird also nun mit einem verglichen, welche r = 100′ hat

cp ist eine halbe Sehne; daher 2. cp = 12

Die Säze folgen so auf einander:

Halbm. zu Halbm.		wie Sehne	zu Sehne
I) 6,1 zu 100	=	wie 12	: 196,721

Die lezte Zal gehört zu dem Winkel 159° $13\frac{1}{3}$′ *)

Man sucht nun die Länge dieses Bogens:

II) 100	:	12,2	= (3,1415 . . .)	:	38,3274
III) 360	:	159,222	= 38,3274	:	16,9516 . .

Der Bogen cnd hält also in Länge 16,9516 . . Schuh. †). Diesen multiplicire man mit $\frac{1}{2}$. d

*) Viele werden nach einer Sehnen-Tafel, welche man in sehr vielen Büchern findet, und welcher r = 30′ zum Grund liegt, einen etwas kleinern Winkel finden; nur 159 Gr. Diese Tabelle ist aber nicht sehr genau, ob sie gleich oft den Namen Ozanams und Sturms trägt. Auch Leutmann, Schulze, Boch . . . geben diese Tabelle unverbessert.

†) Erläuterung zu den vorigen 6 Zeilen. Mit drei Proportionen und der Zwischenrechnung des Bogens oder Winkels ist man, wie hier der Calkül gestellt ist, an dem Kreis-Ausschnitt, oder Sector Pcnd

Die Iste Proportion giebt die Sehne für r = 100.

oder mit $\frac{1}{4}$. (12,2) d. h. 3,05. Das Product giebt 51,7033 Qu. Schuh, als das Quadrat-Maas des Kreisausschnitts Pcd

Von dieser Fläche sind hierauf noch zwei Abzüge zu besorgen:

1) Die Fläche des Δ Pcd ist abzuziehen; und

2) die des innern Halbkreises, amb.

Für einen Halbmesser r = 1 genommen, würde die Sehne = 1,96721.. heissen. Deren Helfte wird der Geometer in den bekannten Sinus-Tafeln finden. Diese sind in 1000 Händen. Aber sie gehören für Trigonometer (sagt man) und wendet sich von ihnen ab. Darum ist die Beziehung auf sie auch hier ganz vermieden worden.

Die IIte Proportion giebt im 4ten Glied die Länge des Kreis-Umfangs bei Annahme eines Durchmessers AB = 12$\frac{2}{10}$ Schuh.

Die IIIte Proportion sagt im 4ten Glied die Länge des Kreisbogens aus, welcher bei dem Winkel 159° 13'$\frac{1}{3}$ statt findet.

Dabei ist der Ausdruck 159,222 im 2ten Glied manchem vielleicht fremd. Auf diese Weise lassen sich jederzeit die den Graden angehängten Minuten und Sec. ausdrücken; und alle Geometer, welche Decimal-Rechnung verstehen, sollten sich üben, Ausdrücke dieser Art immer zu gebrauchen. Sie müssen dabei von leichtern Säzen anfangen: z. B. 159° 6' ist = 159,1. Gr. im Decim. Ausdruck weil 159$\frac{1}{10}$ eben soviel ist. Daher 159° 12' ist = 159,2. Gr. und sofort . . .

Wer übrigens eine genau berechnete Sehnen-Tabelle für r = 100, für Geometer, welche nichts von Trigonometrie hören wollen, bestimmt, gern haben möchte, kann eine Abschrift derselben von mir erhalten.

Das Dreieck Pcd ist

$= \frac{1}{2} . cd . Pp$ oder $\frac{1}{2} . (12) . (1,1)$. d. h. 6, 6.
oder $6\frac{3}{5}$ Qu. Schuh *)

Anstatt des halben Kreises amb aber kann man zuerst den ganzen Kreis sich vorstellen, und sezen:

2. (amb) ist $= (4)^2 . (3,1415..)$, welches 50,2654.. beträgt. Daher nur die Hälfte amb = 25,1327.. Qu. Schuh beträgt. Folglich

+ 6,6.	giebt	31,7327.
Diese Summe wird von . . .		51,7023
abgezogen; Der Rest ist:		19,9696

und dieser ist die Fläche des runden Streifens cndamb.

So ist man dann mit dem gesuchten Quadrat-Maas fertig!

Wenn man die Länge oder Tiefe des Gewölbs aus irgend einer Messung schon kennt, und dieselbe z. B. = 24 Schuh gefunden hätte, so multiplicirt man:

(19, 9696) . (24) ist = 479, 270

Damit kennt man nun den Cubik-Innhalt des ganzen Gewölbs; und spricht ihn aus:

479 Cub. Schuh 270 Cub. Zoll.

---

*) Wenn man den Sector Pcnd weniger dem Δ Pcd, für sich betrachtet, so ist dieß ein Kreisabschnitt cndp. Damit ist erläutert, was oben S. 119. vorgekommen.

XIV.

Ueber die Prüfung verschiedener Krümmungen bei Gewölben, Brükenbogen, bei Portalen, wenn man ungewiß ist, welche krumme Linie vorhanden sei.

1.

Da die Krümmungen in vorkommenden Bogenstellungen, und Wölbungen aller Art mannigfaltig verschieden sind, welche Untersuchungen stellt man, im Fall der Ungewißheit, an, um zu erfahren, welche von dem Zirkel verschiedene Krümmung jedesmal vorhanden sei?

Antwort. Eine genaue Bestimmung hierüber jedesmal zu finden, ist eine der schwersten Aufgaben der praktischen Geometrie, wenn man deshalb etwas recht zuverlässiges aussprechen soll.

Denn die Anzahl der krummen Linien, welche die Krümmung bestimmen können, ist unendlich gros; und gehörige Berechnungen darüber erfordern in den allermeisten Fällen Einsichten in die höhere Analyses, welche man dem praktischen Geometer nicht wohl zumuthen kann.

2.

Sollten sich aber doch nicht mehrere Fälle herausnehmen, und besonders auszeichnen lassen, bei welchen auch der Praktiker vom Zirkel abweichende Krümmungen zu ersehen, und Berechnungen darüber zu führen, wohl fähig seyn möchte?

Antw. Es giebt mehrere solche Fälle wirklich, und die Einsicht davon ist sehr nüzlich. Es läßt sich aber kein belehrender Vortrag darüber in einiger Kürze geben, wenn man 1) nicht Buchstaben-Rechnung dabei anwendet, 2) wenn man nicht einige Kenntnisse von den sogenannten 3 Kegelschnitten voraussezt. Wer sich dagegen sträubt, sollte der Hoffnung entsagen, hierüber eine bündige Belehrung zu fassen!

3.

Welches möchten dann doch die Haupt-Vorstellungen seyn, deren man beim Eingang in diese Lehre bedürftig ist?

Antw. Der praktische Geometer, welcher doch einige Einsicht von Buchstaben-Rechnung hat, und von Kreis- und Ellipsen-Rechnungen etwas, (sei es auch wenig *)) versteht, mag versuchen, ob er folgende Vorstellungen fasse:

*) Wenn er nur den grössern Theil der Säze, welche die vorhergeh. drei Abhandl. XII bis XIV, enthalten, gefaßt hat, so wird er wohl bei dem Vortrag der nächsten 2 Blätter fortkommen können.

Wer unter dem Bogen eines Gewölbs steht, wie etwa in Fig. VIII, auf einer Linie, wie AB, versuche es zuerst mit einem Stab von p aus, nach H oder D hinauf gerichtet, alsdenn rechts und links hin, Messungen vorzunehmen. Ist die Wölbung zirkelförmig, so ist die Gewißheit darüber bald im Reinen. Zwei bekannte Fälle sind immer hiebei möglich; indem entweder ein vollkommener Halbkreis vorhanden ist, oder nur ein Kreisabschnitt.

Beim vollkommenen Halbkreis ist Ap = Dp = Np also die Messung gewöhnlich schnell vollführt. Wenn jedoch in dem Punkt D eine Oeffnung, oder Erhöhung, Verzierung, u. dergl. m. (wie bei manchen Portalen und Brücken . . .) seyn sollte, so daß man der Höhe Dp nicht gewiß wäre, so ist die Prüfung mit Hülfe der Gleichung des Kreises auszuführen.

Man mißt z. B. von S nach N hinauf; alsdenn die 2 Linien AS und SB (horizontal) und nun ist

$NS^2 = AS \,.\, SB$; oder allgemeiner

$yy = x \,.\, (a - x)$

(nach der Erklär. S. 24. oben)

Nun rükt man an eine andere nahe Stelle von S rechts oder links); und nimmt eine neue Höhe, ein neues NS oder ein GB in Fig. V; und prüft, ob es wieder zutreffe, daß

$GB^2 = DG \,.\, AG$, oder ein neues $NS^2 = AS \,.\, SB$ sei,

allgemein $= x \,.\, (a - x)$

Trifft dieses etwa bei 3 oder 4 Fällen in der Ausrechnung (mit Zahlen) nicht zu, so ist kein Halbkreis vorhanden.

Man thut aber wohl, wenn man hiebei, (so wie in vielen andern Fällen) auch die von dem Gesez der Sehnen genommene Gleichung anwendet, nach welchem jederzeit *)

$AN^2 = AS \cdot AB$, oder

$AB^2 = AD \cdot AG$ in Fig. V. ist,

und mit 3 oder 4 solcher Sehnen die Prüfung vornimmt. Treffen die Zahlen zu, daß das Quadrat der Chorde einem Rechteck, wie AS . AB, oder AD . AG, sich gleich zeigt, so ist ein Halbkreis gewiß vorhanden.

Wenn man bemerkt, daß kein Halbkreis, sondern blos der Bogen zu einem Kreisabschnitt vor-

---

*) Es giebt viele Beweise hiezu. Einen kann man aus unsern Säzen oben S. 71. nehmen. Da ist erwiesen: $AE : AB = AD : AG$. Also ist auch $AB^2 = \frac{AE^2 \cdot AG^2}{AD^2}$. Schreibe dafür: $\left(\frac{AE^2 \cdot AG}{AD^2}\right) AG$. Der Quotient in d. Klammer ist $= AD$, welches aus der Gleichung $\frac{AD^3}{AE^2} = AG$ folgt. Also ist $AB^2 = AD \cdot AG$ gewiß. (Bei diesem Anlaß corrigire man den Nenner S. 75. wo in der Gleichung zu AG (unten) nur AE steht, und AE^2 stehen sollte. S. 71 ist der Bruch richtig gesezt.)

handen sei, über die circulare Form aber doch selbst noch ungewiß ist, so muß man zuvörderst den Kreis-Diameter (durch Messung und Rechnung zugleich) zu bestimmen sich anschiken; und deshalb z. B. bei einem Gewölb, wie etwa in Fig. VII sich eines denken läßt, aus den 2 Linien AS und NS, welche jezt allein gegeben und durch unmittelbare Messung *) bekannt sind, den

$$\text{Diam. } AB = \left(\frac{NS^2}{AS} + AS\right)$$

berechnen. Kennt man diesen, so stellt man nun, vermittelst der Ordinaten Gleichung, oder auch vermittelst der Chorden-Gleichung die Prüfungen so an, wie sie auf dem vorigen Blatt angedeutet worden sind.

Man rükt NS in Gedanken gegen A hin, und berechnet 3 oder 4 Säze, um sich zu überzeugen, daß die Gleichung des Kreises ihre Anwendung finde. Zeigt sich, daß dieses nicht angehe, so ist auch keine circulare Krümmung vorhanden, und man erkennt damit, daß man an eine andere Curve zu denken habe.

---

*) Hiebei ist der Punkt A als oben im Scheitel liegend zu denken; und ANS als die Fläche eines halben Kreisabschnitts.

4.

Der Uebergang zu der elliptischen Form wird nun der nächste seyn? — Auf welche Weise prüft man aber diese Vermuthung?

Antwort. Man muß die Ordinaten-Gleichung der Ellipse kennen und hier anwenden. Sie heißt allgemein

$$yy = \frac{cc}{aa} . (ax - xx)$$

wo a die große Axe vorstellt; c die kleine; oder in Beziehung auf unsere Fig. VIII.

$$yy = MS^2 = \frac{4 . Hp^2}{AB^2} (AB . AS - AS^2)$$

wo AS = x die Abscisse bedeutet; MS = y die Ordinate (Siehe in S. 118. zurück.)

Wenn die große Axe AB = 10 Schuh lang wäre, die kleine: 2 Hp = 8; also Hp = 4; so wird die Gleichung seyn

$$yy = \frac{4 . 16}{100} . (10 . AS - AS^2)$$

und die bestimmten Zahlen $\frac{64}{100}$ und 10 werden nun beständig bleiben, auch wenn AS größer oder kleiner angenommen wird, weil AS als Abscisse veränderlich ist, die 2 Axen aber beständig bleiben *). Nun nehme man 3 Abmessungen von

*) Man sehe hiebei in den Vortrag S. 24. zurük. Ohne das Wesentliche der Lehre von veränderlichen und beständigen Größen gefaßt zu haben, kommt man hier nicht fort.

3 Abscissen und von 3 Ordinaten wirklich vor. Die erste Abscisse AS sei = 2 Schuh; alsdenn $2\frac{1}{2}$ Schuh; alsdenn 3 Schuh; (genau gemessen.) In dem ersten Fall ist

$$yy = \frac{64}{100}\,(10 \cdot 2 - 4) = 10{,}24$$

In dem zweiten Fall ist

$$yy = \frac{64}{100}\,(10 \cdot 2{,}5 - 6{,}25) = 12{,}00$$

In dem dritten Fall

$$yy = \frac{64}{100}\,(10 \cdot 3 - 9) = 13{,}44$$

Die Qu. Wurzeln dieser Größen sind

$$\sqrt{10{,}24} = 3{,}2;\quad \sqrt{12{,}00} = 3{,}4641$$

und $\sqrt{13{,}44} = 3{,}66606$.. Wenn diese Längen mit den 3 gemessenen Ordinaten übereinkommen, oder wenn 3 Lothe, (drei y oder MS) im Mas nahe an $3\frac{2}{10}$, an $3\frac{4}{10}$, an $3\frac{2}{3}$ liegen, so darf man wohl annehmen, es sei eine elliptische Krümmung (und keine circulare) vorhanden.

Damit man des Geschäfts, Qu.Wurzeln auszuziehen, überhoben bleibe, so erhebe man drei y sogleich nach der ersten wirklichen Abmessung ins Quadrat, noch ehe man die Ordinaten-Gleichungen nur aufstellt, und deren Ausrechnung in Concreto vornimmt. Z. B. wenn das erste Loth = 3,2 Schuh lang wäre, so multiplicire man (3,2). (3,2). (3,2). Das Product ist 10, 24.

Wenn das 2te Loth $3\frac{1}{2}$ wäre, so wird das Produkt (3,4).(3,4) = 11,56. seyn.

Wenn das 3te Loth $3\frac{2}{3}$ Schuh wäre, so wird das Quadrat 13,444.. seyn.

Diese Multiplicationen sind leichter als die Wurzel-Auszüge. Nun berechne man die angeführten Ordinaten-Gleichungen. Der Erfolg zeigt sehr geringe Abweichungen, von welchen blos die mittlere einige Rüksicht verdient. Zur Sicherheit messe man etwa noch eine 4te Ordinate; und wiederhole an ihr die Prüfung. So ist man bald im Hellen; und das Geschäft ist nicht so beschwerlich, als es Anfängern nur scheint. Der Quotient $\frac{cc}{aa}$, hier $\left(\frac{64}{100}\right)$ kommt als eine und ebendieselbe Zal jedesmal bei derselben Ellipse, wieder vor.

5.

Wenn nun aber das Resultat dieser Rechnungen weder mit einem circularen noch elliptischen Bogen stimmt, was ist alsdenn vorzunehmen?

Antwort. Nun kann die Krümmung auch hyperbolisch oder parabolisch seyn *). Die Annahme und Berechnung einer hyperbolischen Curve mag den prakt. Geometern erlassen seyn; die einer parabolischen ist aber so leicht, als die der elliptischen, ja noch leichter.

Man denke sich, daß dem Gewölb, unter wel-

*) Die verschiedene Krümmung kann auch von einem zusammengesezten Bogen (einem gedrükten Kreisbogen) herrühren. Hievon soll in dem lezten Abschnitt besonders noch gehandelt werden.

chem man stehe, eine Figur etwa, wie die Fig. XIII. zukomme, wo A der Scheitel-Punkt sei. Nun messe man von der Mitte P, wo man steht, hinauf nach A; und finde AP = $7\frac{1}{2}$ Schuh lang; alsdenn horizontal hinüber GP = 3 Schuh.

Man dividire mit $7\frac{1}{2}$ in das Quadrat von 3, seze also $\frac{9}{7,5}$. Der Quotient ist $\frac{90}{75}$ = 1,2. (ein Schuh 2 Zoll). Diese Zal merke man sich; u. gehe nun zu einer 2ten Messung über, indem man seinen Stab von P gegen A hinaufrücke. Diese 2te Messung gebe nun

AP′ = 6,3; und G′P = 2,75 oder $2\frac{3}{4}$.

Man verfahre, wie vorher; und berechne $(2,75)^2$ divid. durch 6,3; oder $\frac{121}{16}$: $(\frac{63}{10})$ d. i. $\frac{1210}{1008}$ = 1,2003.

Dieser Quotient ist offenbar von dem nächst vorher erhaltenen (1,2) äußerst wenig verschieden.

Man gehe zu einer 3ten Messung fort, und finde:

AP″ = 5 Schuh G″P aber = 2,45.

Hier ist $(2,45)^2$: 5 oder $\frac{60{,}025}{5}$ = 1,2005.

Und auch dieser Quotient liegt wieder gar sehr nahe an 1,2.

Fände sich bei einer 4ten Messung eine noch kleinere Linie als AP″, (welche AP‴ heißen möge) = $3\frac{1}{3}$ Schuh, und G″P = 2; so würde

$(2)^2$: $(3\frac{1}{3})$ od. (4 : $\frac{10}{3}$) = $\frac{4 \cdot 3}{10}$ = 1,2.

vollkommen betragen.

Wenn sich nun jederzeit, so oft eine ähnliche Operation wiederholt wird, (meistens sind aber vier zureichend) eben derselbe Quotient (wie hier 1, 2) wieder findet, so ist gewiß eine parabolische Krümmung vorhanden.

Man nennt diese beständige Größe den Parameter der Parabel. Gewöhnlich bezeichnet man ihn allgemein mit a; und spricht

$$a \, . \, x \text{ ist } = yy; \text{ und also}$$

$$a = \frac{yy}{x}$$

wäre die allgemeine Vorstellung unsers Quotienten; die Gleichung $a \, . \, x = yy$ aber heißt die Ordinaten-Gleichung der Parabel.

Die Untersuchung, ob sie bei einem vorkommenden Gewölb vorhanden sei, ist nach allem diesem leichter vollführt, als die beim Kreis und bei der Ellipse.

Ist man nun dieser parabolischen Krümmung gewiß, so schreitet man sogleich zu der Berechnung der Fläche unter diesem Bogen. ABG, in Fig. XIII. Und dieser Calkül ist vollends der leichteste, der sich denken läßt.

Denn ABG ist $= \frac{2}{3} \, . \, (AP \, . \, BG)$ oder mit Worten: Diese Fläche ist jederzeit $\frac{2}{3}$tel eines Rechtecks, dessen eine Seite AP, die vorhandene Höhen-Linie, und dessen andere BG die vorhandene ganze Horizontal-Linie, (das ist hier 2 . GP,

die doppelte Ordinate) wäre. Allgemein spricht man:

2 . (x . y) ist die gesuchte Fläche unter dem parabolischen Bogen.

In dem ersten angenommenen Beispiel beträgt daher diese Fläche

$$= \frac{2}{3}\ (AP\ .\ BG) = \frac{2}{3}\ .\ [7{,}5\ .\ 2\ .\ (3)]$$

oder $\frac{2}{3}\ .\ (\frac{15}{2})\ .\ 6$ d. h. 30 Qu. Schuh.

In dem lezten aber:

$$\frac{2}{3}\ [3\tfrac{1}{3}\ .\ 2\ .\ (2)] = \frac{2}{3}\ .\ \frac{10\ .\ 4}{3} = 8\tfrac{8}{9}$$

Hieraus erhellet zugleich, daß die Hülfsgröße a, der Parameter, welchen man bei der Untersuchung der Krümmung nöthig hat, bei Berechnung der parabolischen Fläche selbst, in den Calkül nicht mehr eintritt, sondern blos die Absciſſen. Die Ordinate AP und GP, oder x und y.

Die Quadratur dieser Fläche ist vollständig, und darinn hat sie den Vorzug von der des Kreises und der Ellipse, durch welche man blos Näherungen, niemals vollständig berechnete Flächen erhält. Darüber giebt die höhere Analysis nähere Auskunft.

XV.

Ueber die Berechnung der Flächen unter gedrükten Kreisbögen.

I.

Was hat man sich unter der Benennung gedrückte Bögen, welche man oft hört, deutlich vorzustellen?

Antwort. Man denke sich einen Bogen von verschiedener Krümmung, (bei welchem die Wölbung nicht gleichförmig fortläuft,) und zwar (für den Anfang) eine aus verschiedenen, aber bequem übersehbaren bestimmten Kreisbögen zusammengesezte Krümmung. Die einfachsten Fälle sind folgende: (Fig. XV.)

I) Die gerade Linie EF sei in drei gleiche Theile getheilt: AF, AB, EB. Ueber EF sieht man einen Bogen EIF. Von G bis H ist derselben flächer, als gegen F und E. Der Bogen GH gehört zu einem Kreis, dessen Halbm. GC oder IC heißt, und ist mit GC selbst beschrieben. Der Bogen FG ist gekrümmter; er ist mit AF = AG, als Halbmesser beschrieben. Eben so auf der Gegenseite EH, wo BE = FA der Halbmesser ist. Man sehe hiebei sogleich das △ ABC aufmerksam an. AC ist = AB; und auch AF; es ist gleichseitig.

Hier hat man also 3 Centra von Kreisen zu denken; eines in C, eines in A, eines in B, und man sieht ein, daß FIE ein zusammengesezter Bogen sei, auch warum man ihn einen gedrükten heiße. (Rechts und links ist er ja wie zusam-gedrükt.)

II) Fig. XVI.

Der zweite Fall: EF werde in 4 gleiche Theile getheilt AF, AK, KB, BE, AB ist hier $\frac{1}{2}$ EF gleich. Man errichte ein △ ABC, in welchem AB als Basis gelte. Die Verlängerung der 2 Seiten AC und CB, nach G und H stellt 2 gleiche Halbmesser dar, GC und CH, mit welchen der Bogen GIH beschrieben wird. Mit FA und BE beschreibt man wieder an den 2 Seiten die Bögen FG und EH. Und damit ist abermals ein gedrükter Bogen vorhanden.

So kann man EF in 5, in 6, in mehr Theile abtheilen; und immer am Ende mit Linien, wie AF, EB, zwei gekrümmte kleine Bogen beschreiben.

2.

Wie wird nun die Berechnung der Flächen, welche unter solchen gedrückten Bögen stehen, geführt?

Antwort. Offenbar sind jedesmal 2 verschiedene Kreise vorhanden, und nicht mehr. Der eine, dessen Centrum in C ist, der andere, dessen Centrum in A ist. (Der dritte, bei welchem das Centrum in B ist, erfordert keine besondere Rechnung, weil EB = AF jedesmal ist.)

Augenscheinlich ist GCH ein Sector; und FAG auch ein Sector. Die Fläche unter dem gedrükten Bogen aber ist so gros, als

(Sect. GCG — △ ABC + 2. Sect. FAG)

In der Ausrechnung hat man daher jederzeit ein Dreieck, wie ABC von dem grössern Sector abzuziehen; und die Summe der 2 Seiten = Sectoren zu addiren.

Beispiel: EF sei 150 Schuh lang, also (in Fig. XV) AF = 50, AB = 50, EB = 50.

Der Winkel bei C ist = 60°, weil das △ gleichseitig ist; also GH ein Bogen von 60 Gr. Dieser Kreisausschnitt wird nun berechnet. (Siehe in S. 128. zurück). Es findet sich:

Sect. GCH	=	5235,99
△ ABC	=	1082,53
		4153,46
+ 2 Sect. AFG	=	2617,99
		6771,45

So hat man die gesuchte Fläche, oder das Qu. Maas der Fläche FIEK.

Aber das Dreieck ABC unter dem mittlern Theil der Linie EF muß nicht eben nothwendig ein gleichseitiges seyn.

Man stelle sich vor, die Linie EF bleibe, auch ihr mittleres Stück AB = $\frac{1}{3}$ EF, aber der Winkel C oder ACB, werde spiziger. Damit wird CG gegen I herauf rücken, und der Bogen FG zuneh-

men. Die Höhe IK aber wird nun kürzer und der mittlere Kreisbogen zu einem kleinern Winkel, als nur zu 60 Gr. gehören. Nothwendig wird die Fläche unter dem gedrückten Bogen jezt kleiner ausfallen. Wenn C = 45° wäre, so wird sie über 111 Qu. Schuh kleiner seyn, insoferne EF = 150 in Länge bleibt.

Leicht begreiflich wird die Fläche grösser ausfallen, wenn man umgekehrt den Winkel C grösser, als 60 Gr. annimmt, und die Linie IK wird nun länger sich zeigen.

Zur Uebersicht dienen die Resultate des Calküls bei folgenden 5 Annahmen.

Bei dem Winkel	ist IK	ist AC	und die Fläche
ACB = 90°	60,3553	35,3553	7060,53
ACB = 75°	58,4863	41,0670	6904,105
ACB = 60°	56,6987	50,000	6771,45
ACB = 45°	54,9728	65,3281	6660,16
ACB = 30°	53,2909	96,5923	6565,867

Der Construction gemäs, ist jedesmal CG = AC + AG, oder (AC + ½ EF); eben so gros ist CI. Wenn daher EF, als Länge, gegeben ist, so hängt die Länge des grössern Halbmessers CG nothwendig von AC ab; AC aber von der Grösse des Winkels ACB; oder dieser von der Länge der Linie AC, umgewendet.

Ganz ebendieselbe Beschaffenheit hat es mit der Berechnung dieser Linien und Flächen, wenn man EF in 4 gleiche Theile abtheilt, und AF = AK = $\frac{1}{2}$ AB = $\frac{1}{4}$ EF annimmt; wie in Fig. XVI. Auch hiebei ist CG = AC + AG, oder (AC + AF) jezt = AC + $\frac{1}{4}$ EF).

Zur Uebersicht mögen auch hierüber die Resultate von 5 Annahmen wachsender Winkel (ACB) hier mitgetheilt stehen. Die Haupt-Linie sei wieder = 150 Schuh in Länge; aber die Linie $\frac{1}{4}$ EF jezt = 37$\frac{1}{2}$ Schuh, welche bei AF = $\frac{1}{3}$ EF oben 50 betragen hat.

Bei dem Winkel	ist IK	ist AC	und die Fläche
ACB = 90°	53,0330	53,0330	6135,425
ACB = 75°	50,2295	61,6005	5883,566
ACB = 60°	47,5480	75,000	5613,736
ACB = 45°	44,9593	97,9925	5454,375
ACB = 30°	42,4370	144,8889	5301,524

Es läßt sich leicht bemerken, daß die Flächen unter dem gedrükten Bogen bei der Eintheilung der Linie EF in 3 Theile durchaus grösser sind, als die bei der Eintheilung von EF in 4 Theile, wenn der Winkel ACB eben derselbe ist. Folgende Vergleichung ist dabei nicht unwichtig.

Bei ACB = 90° ist diese Fläche um 15 Pro-

cent grösser, bei AF = $\frac{1}{3}$ EF; als bei AF = $\frac{1}{4}$ EF.

Bei ACB = 75° um $17\frac{3}{10}$ Procent.

Bei ACB = 60° um $20\frac{6}{10}$ Procent.

Bei ACB = 45° um $22\frac{1}{10}$ Procent.

Bei ACB = 30° um $23\frac{8}{10}$ Procent.

indem man nemlich, wie folgt, schließt:

6135,425 : zu 7060,534 = 100 : zu 115,078 und so ganz gleichförmig jedesmal, um die Grösse der Procente zu erhalten: Dabei habe ich die Hundert-Theilchen ausser acht gelassen, und daher z. B. $17\frac{3}{10}$ gesezt, anstatt 17,318 ... Die Schärfe ist weit genug geführt. *)

---

*) Wenn der Praktiker bei einem ihm vorkommenden gedrückten Bogen in der Ungewißheit ist, ob die Abtheilung der Hauptlinie EF in 3 Theile, oder in 4, eben jezt anzunehmen sei, so muß er Versuche anstellen, und oben (am Gewölbe) in der Gegend von G über I hin bis M (ungefähr) messen; hierauf die Sehnen vergleichen und zusehen, wo die gleiche Krümme des flachen Kreisbogens wohl aufhöre? .. Dem analytischen Geometer lassen sich andere Prüfungs-Mittel noch mittheilen. Zu deren Ausführung ist aber in diesen Blättern kein Raum vorhanden.

3.

Bei den angeführten Calküls ist jederzeit angenommen, es sei unter der Hauptlinie EF ein Dreieck, wie ABC, vorhanden. Allein, wie findet man denn eben dieses untere Dreieck, wenn in der Wirklichkeit blos die Linie EF und IK (die Höhe) mit dem zusammengesezten Bogen FIE vorkommen?

Antwort. Dieses ist allerdings der praktische Fall! Hiebei kommt uns nun, Geometrie und Analysis vereint, herrlich zu statten. Denn es läßt beweisen, daß die Linie AC (eine Seite in dem gleichschenklichten untern Dreieck ACB) allemal blos durch die gegebenen Linien EF und IK sich ausdrücken und bestimmen lasse; und zwar so, daß

1) wenn EF in 3 gleiche Theile getheilt, vorkommt, also $AF = \frac{1}{3} EF$ ist, die Gleichung *) statt habe:

$$AC = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{\frac{1}{4} \cdot EF^2}{3 \cdot IK - EF} + (3 \cdot IK - EF) \right)$$

*) Ber Beweis der Richtigkeit dieser Gleichung beruht auf folgenden Säzen:

1) Der Figur XV gemäs ist $AK = \frac{1}{6} EF$ und daher $AC^2 - CK^2$ ist AK^2 oder $\frac{1}{36} \cdot EF^2$

2) $CI = CG$ ist auch $= AC + \frac{1}{3} EF$; auch $CK + IK$

3) Aus $AC + \frac{1}{3} EF = CK + IK$ folgt $AC - CK = IK - \frac{1}{3} EF$

2) wenn EF aber in 4 gleiche Theile getheilt, also $AF = \frac{1}{4} EF$ ist, daß die Gleichung statt habe:

$$AC = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{EF^2}{4 \cdot IK - EF} + (4 \cdot IK - EF) \right)$$

Sobald man aber AC kennt, so ist das $\triangle$ ACB gegeben, und läßt sich nach allen Theilen construiren, insoferne als AB als ein bestimmter Theil der Hauptlinie EF schon bekannt ist, entweder

---

4) Man schreibe die Gleichung in Nr. 1. so: $(AC + CK) \cdot (AC - CK) = \frac{1}{36} \cdot EF^2$; und folgere $(AC + CK)$ ist $= \frac{1}{36} \cdot EF^2$ div. durch $(AC - CK)$

oder auch $= \frac{1}{36} EF^2$ div. durch $(IK - \frac{1}{3} EF)$

in leichterer Form: $(AC + CK)$ ist $= \frac{EF^2}{12 \cdot (3 \cdot IK - EF)}$

5) Man hat dem allem nach $(AC + CK)$ und $(AC - CK)$ blos durch EF und IK ausgedrükt vor sich. Das ist: Summe und Differenz der 2 Größen AC und CK ist gegeben. Folglich sie selbst auch einzeln nach einer sehr bekannten Regel.

AC (die grössere der beeden) ist die halbe Summe plus der halben Differenz. Das ist eben der Werth, welcher oben steht, die Gleichung zu AC. Man rechne nur nach!

$$CK \text{ aber ist} = \frac{1}{6} \left(\frac{\frac{1}{4} EF^2}{3 \cdot IK - EF} - (3 \, IK - FE) \right)$$

Die Deduction für die nächstfolgende Gleichung wird auf eben diese Art geführt. Der Weg ist nun doch wohl sattsam angedeutet.

als $\frac{1}{3}$ EF, oder als $\frac{1}{2}$ EF. Man denke dabei 2 AK = AB; und daher AK entweder = $\frac{1}{6}$ EF bei Fig. XV. oder = $\frac{1}{4}$ EF bei Fig. XVI. Das Dreieck ACK ist allemal rechtwinklicht; und deshalb ist in jedem Fall CK = $\sqrt{(AC^2 - AK^2)}$ Folglich ist auch CK gewiß gegeben. Und diesem nach alle Theile des Dreiecks ACK; nothwendig also auch der Winkel darinn, d. h. $\frac{1}{2}$ ACB, und eben damit C oder ACB selbst.

Hieraus ist nun klar, daß dieses Dreieck, welches anfangs, gleichsam nur in der Luft vorhanden zu seyn scheint, sich durch Anwendung leichter Schlüsse und Folgerungen vollkommen darstellen und berechnen lasse. Gewiß also auch CI, die größere Radius, welches immer = IK + KC ist.

Hiemit ist das Problem ganz gelößt; und es gehört zu dieser Lösung nicht einmal Trigonometrie, ob man gleich mittelst derselben überall noch kürzer zum Ziel zu gelangen den Vortheil hat.

4.

Dem Anschein nach müssen öfters die Größen der Flächen unter solchen gedrückten Bogen mit den Flächen halber Ellipsen übereinkommen. Trift dieses nicht wirklich bei Annahme eines gewissen Verhältnisses von EF gegen die Höhenlinie IK zu?

Antwort. Ja! Mittelst Anstellung besonderer Rechnungen findet man, daß, wenn EF in 3

gleiche Theile getheilt angenommen wird, und EF gegen IK in Länge, wie 100 gegen 39¼ steht, die Fläche unter dem gedrükten Bogen äusserst nahe mit der Fläche einer Halb Ellipse übereinkomme, deren große und kleine Axe sich wie EF und 2 IK verhalten; oder deren Halb-Axen also, wie ½ EF zu IK = 50 : 39¼ gesezt werden. Dabei findet sich der Winkel in dem △ ACB oder C nahe an 78° liegend.

Diese Bemerkungen sind für den Praktiker gar nicht unwichtig, weil die Berechnung der Fläche einer Halb-Ellipse ein so gar leichtes Geschäft ist, (wie aus S. 113. erinnerlich seyn wird) und er deren Calculation gewiß immer bei der Ausrechnung der Fläche unter einem gedrükten Bogen vorziehen wird. So bald er nun EF und IK gemessen hat, so wird er blos durch einfache Regel de Tri schnell ersehen können, ob

EF : zu IK = wie 100 : 39¼

sich verhält, oder ob seine Zahlen doch nahe an dieses Verhältnis hinrücken. Führte ihn die Rechnung nicht auf 100 : 39¼, sondern auf 100 : 39$\frac{1}{10}$ oder 100 : 39; so ist die Fläche der halben Ellipse (dieser Construction) kleiner, als die Fläche unter dem gedrükten Bogen. Führen ihn aber seine Zahlen auf 100 : 39½ oder auf 100 : 40 d. h. 10 zu 4, so ist die Fläche der halben Ellipse größer *). Die

*) Bestimmte Nachrechnungen zeigen folgendes: Wenn EF = 150; IK = 58½ in Länge ist (also die

Prüfung, ob EF : IK als 10 zu 4 oder 10 zu $3\frac{9}{10}$ in einem wirklichen Fall vorhanden sei, ist leicht, und jedem Praktiker hiebei zu empfehlen. Bei EF = 10; IK = $3\frac{1}{2}$ (oder 100 : 35), ist die Fläche der Halb-Ellipse schon bedeutend kleiner, als die unter dem gedrükten Bogen. Der Unterschied beträgt schon hier 1 Procent im Qu. Maas, so daß nehmlich das Verhältnis sich darstellt: Fläche unter dem gedr. Bogen : zu Fläche der Halb. Ell. = wie 100 : zu 101,04.. wofür sich wohl 100 : 101 sezen läßt. Dabei fällt der Winkel sehr spizig aus; er ist nur noch 22° 50'$\frac{1}{2}$.

Für den Fall, wenn der Winkel C ein rechter Winkel also C = 90° ist, beträgt die Fläche unter dem gedruckten Bogen 49,92 Qu. Sch. weniger, als die unter der Halb-Ellipse. Allgemein aber ist in jedem solchen Fall (bei C = 90°) die Halb-Ellipse beinahe $\frac{3}{4}$ Procent grösser, als die Fläche unter dem gedr. Bogen; genauer um 0,72.. Procent, indem das Verhältnis hiebei eintritt: 100 : 100,72.

---

das Verhältnis 100 : 39 statt findet, so hält die Fläche unter den gedrükten Bogen 6899,156 Qu. Schuhen, die unter der Halb-Ellipse aber 6861,870; also 37,286 Qu. Schuh weniger. Dabei ist der Winkel C = 74° 20'$\frac{1}{3}$. Wenn aber EF = 150; IK = 60 ist, so ist die Fläche unter dem gedr. Bogen = 7029,42 Qu. Sch. die unter der Halb-Ellipse aber = 7068,58.. Also 39,16 größer. Dabei ist der Winkel C = 87° 12'$\frac{1}{3}$.

5.

Wie aber? wenn EF nicht in 3, sondern in 4 gleiche Theile getheilt würde, so daß AB = $\frac{1}{2}$ EF oder FA = $\frac{1}{4}$ EF gesezt wäre, welches Verhältniß von EF : IK muß hiebei eintreten, wenn die gedachten zwo Flächen im Qu. Maß gleich seyn sollen?

Antwort. Für den Fall der Gleichheit der erwähnten zwo Flächen müssen die Längenmaße von EF und IK sich = 100 : 32,81.. verhalten, oder wie 150 : zu $49\frac{21}{100}$ (sehr nahe 150 : 49,22).

Schon, wenn 100 : $32\frac{8}{10}$ nur angenommen wird, oder 150 : $49\frac{2}{10}$, fällt die Fläche der Ellipse etwas kleiner aus, als die Fläche unter dem gedrückten Bogen *). Und dagegen, wenn sich die Längen EF : IK = wie 100 : $32\frac{5}{6}$ oder 32,833.. verhalten, d. i. wie 150 : $49\frac{1}{4}$, so zeigt sich die Fläche der Ellipse grösser, als die unter dem gedrükten Bogen. Die Abweichung ist aber hiebei noch sehr wenig bedeutend. Diese Bestimmungen verdienen aber immer angeführt zu werden, um

*) Bei 150 : $49\frac{2}{10}$ wird man den Winkel C in dem untern Dreieck = $69° 18' 44''$ finden.
Bei 150 : $49\frac{1}{4}$ aber = $69° 35' 15''$.
So wie IK zunimmt (in Länge), so nimmt auch der Winkel C zu; und die Fläche der Halb-Ellipse zeigt sich grösser. In dem Fall der Gleichheit oder bei EF : IK = 150 : 49,21.., d. h. 100 : 32,81.. ist der Winkel C = $69° 24'\frac{1}{2}$ (sehr nahe) der zutreffende Winkel.

gleichsam die rechte Scheidelinie bemerklich zu machen, oder den Punkt, wo die Gleichheit der gedachten 2 Flächen eintritt, und wohin zu (gleichsam nach welcher Gegend hin) sie abnehmen oder zunehmen.

Da 100 : 32,81 ... ziemlich nahe an 100 : $33\frac{1}{3}$ oder an dem Verhältnis 1 : $\frac{1}{3}$ liegt, und der Praktiker diese Messung am allerersten und leichtesten hiebei versuchen dürfte, so ist es wohl nicht überflüßig beizusezen, daß in diesem Fall die halbe Ellipse, mit EF und IK beschrieben, wenn diese Linien 150 und 50 in Länge bedeuten, um $26\frac{4}{9}$ Qu. Schuh mehr Fläche habe, als die unter dem gedrükten Bogen; oder, allgemein nach Procenten genommen, daß die halbe Ellipse jedesmal bei $\frac{9}{20}$ Procent *), (also nicht ganz $\frac{1}{2}$ Procent) größer sei, als die Fläche unter dem gedr. Bog. Der Winkel C in dem △ ACB beträgt hiebei 72° 44′ 24″; und ist um $3\frac{1}{3}$ Gr. größer, als der, welcher bei 100 : 32,81 .... im oben erwähntem Fall der Gleichheit statt hat.

Wenn der Winkel in dem Dreieck ACB, oder C = 90° bestimmt angenommen wird, so beträgt

*) Die Rechnung giebt nemlich, daß die Halbe Ellipse 5890,488 Qu. Sch. halte, die unter dem gedr. Bogen aber 5864,04 .. Nun verhalten sich aber: 5890,488 : 5864,04 = 100 : 100,451
= 100 : $100\frac{9}{20}$.

die Fläche unter dem gedrükten Bogen 6135,42 Qu. Schuh mehr. Allgemein aber hat das Verhältnis statt, daß die Fläche unter der Halb-Ellipse bei diesem Winkel mehr als $\frac{1}{6}$ Procent, doch weniger als $\frac{1}{5}$tel Proc. genauer: $\frac{9}{50}$ Procent ausmacht, als die unter dem gedr. Bogen, indem der Calkül die Proportion giebt:

Fläche unt. dem gedr. Bogen : Fläche der halb. Ell. = 100 : 100,183

Mittelst dieser Verhältnisse kann der praktische Geometer sich vielerlei Berechnungen ersparen. Man stelle dabei Vergleichungen an mit den Angaben, welche S. 147 u. S. 152. vorgekommen sind.

Schluß-Anmerkung.

Vollständigere Ausführungen erfordern ein eigenes Buch, und dennoch sind ausübende Künstler und Arbeiter, wenn sie nicht in Analysis wohl bewandert sind, schwer hierüber zu verständigen, u. zu befriedigen. Sie würden in den allermeisten Fällen besser thun, sich an die Ellipse zu halten, und den Calkül allein mit Annahme einer elliptischen Krümmung zu führen. Er geht viel leichter und sicherer von statten, selbst nur auf mechani-

sche Weise, nach den oben angeführten Vorschriften, wenn blos wenige Säze im Eingang wohl gemerkt werden.

Allein, weil mit dem gemeinen Instrument des Zirkels gedrückte Bogen aller Art gezeichnet werden können, so sind doch viele Praktiker geneigt, dieses Aufreissen von Kreisbögen (wie man es nennt,) vorzuziehen; und es bekümmert sie wenig, ob der darauf erfolgende (von ihnen oder von andern auszuführende) Calkül genau oder ungenau ausfalle. Gewöhnlich ist er äusserst ungenau, und weil die vorhandene Krümmungen meistens nicht ganz mathematisch-scharf bestimmt sind, so fehlt es der Unwissenheit oder Bequemlichkeit *) des Rechners hiebei niemals an einer guten Ausflucht! —

Es ist zu bedauren, daß die Instrumente, mit welchen man Ellipsen mechanisch verzeichnet, nicht so häufig als die des gemeinen Zirkels gefertigt werden. Ihre Anwendung sollte viel ausgedehnter seyn.

Nur, wenn man den gekrümmten Bogen (die Curve) selbst, als eine Länge (linearisch), aus-

---

*) Zu leugnen ist es übrigens nicht, daß auch geschikte Geometer und Analytiker durch unbestimmte Krümmungen, wobei mathematische Schärfe in der Wirklichkeit fehlt, oft in Verlegenheit gesezt werden, und sich nur mit Annahme gewißer Grenzen helfen müssen.

sprechen will, muß der gewöhnliche Geometer auf den Kreis zurük gehen, weil die Berechnung elliptischer Bögen, linearisch genommen, eigene Schwierigkeiten mit sich führt, (wofür sich jedoch, wenn man den Gegenstand wohl erwägt, auch Rath schaffen läßt). Die Bestimmung dieser Länge braucht man aber bei Gewölb-Brücken- und andern Bau-Rechnungen fast gar nicht, indem man blos die Flächen unter den Bögen sucht, welche sich bei Annahme einer Ellipse durchaus ganz leicht, mittelst gemessener Ordinaten und Abscissen finden, und genau bestimmen lassen, wie auf den vorigen Blättern sattsam gezeigt worden ist.

Wer übrigens beide Kenntnisse verbindet, (die Behandlung des Kreises und der Ellipse) wird allerdings bei unzähligen Aufgaben, welche in diesem Fach in Praxi vorkommen, sich überall am besten zu helfen wissen; und er wird insbesondere auch jederzeit Proben über seine eigene Rechnungen, so wie über die Angaben anderer anstellen können, welche ihm die Mühe reichlich belohnen werden, die die Erwerbung der theoretischen Einsichten im Eingange in diese Wissenschaften ihm verursacht hat.

Alphabetisches Register.

Abscissen, einiges davon. S. 121. 136. 141.

Abfall von runden Holzstämmen; wie man ihn berechnet S. 91. . 95.

Abschnitt im Kreis, wie man ihn berechnet, S. 132. 135.

— in Kugeln; von der Höhe des Abschnitts, als Linie. S. 101. 106. 144.

Aehnliche Dreiecke, welche es sind, und Schluß dabei, S. 21. 27. 60. 70.

Ausschnitte im Kreis, deren Berechnung. S. 128.

Axen der Ellipse, und deren Helften; davon S. 112. 116.

Axe der Ellipse, die große, wie man sie durch Rechnung findet, S. 121.

Balken-Seite, als Chorde betrachtet (als Sehne) S. 91.

Balken-Schuh, was man darunter verstehe, S. 94.

Bögen, (Kreisbögen) als Längen berechnet

— gedrückte oder zusammengesezte. Davon S. 142.

—— unter solchen B. enthaltene Flächen, wie man sie mit Halb-Ellipsen vergleiche, S. 151.
Brüche mit verschiedenen Nennern, warum man sie nicht zusammenzählen könne? — u. wie man sie umbilde; S. 2. 3.
Brüche, in Buchstaben-Formeln ausgedrückt, S. 16.
Buchstaben-Rechnung; was man sich darunter zu denken habe, S. 13. 16.
—— wie sie zu Beweis-Führungen sehr dienlich sei, S. 108. 117.
Chorden, einige, zu bestimmten Graden gehörige, welche besonders zu merken seien, S. 60 — 63.
—— ihre Vergleichung mit Sinus, S. 61. 129.
—— ihre Vergleichung im Zirkel, gegen die Kreisbogen (ober ihnen) gehalten, S. 87. 88.
—— Tabellen (Sehnen-Tabellen) S. 128. 129.
—— Quadrat (der Chorde) welchem Rechteck es jedesmal gleich sei, S. 134.
Conus, Schnitte durch ihn geführt; davon S. 103.
—— der abgekürzte, wie er berechnet wird, S. 104.
Cubik-Zolle, als Decimal-Brüche vorgestellt, S. 95. 100. 130.
Cubus (der vollkommene Würfel) in einem Cylinder liegend; dessen Ausrechnung u. Vergleichung, S. 97. 98.
—— des Diameters, in Rechnung, wie u. wenn man darauf hinaus komme, S. 71.

Cylinder, dessen Berechnung und Vergleichung mit andern Körpern, S. 96. 104.

Decimal-Brüche, bedürfen der Reduct. unter einem Nenner nicht. Erklärung darüber, S. 5.

— — ihre aufmerksame Ansicht führt oft auf praktische vortheilhafte Schlüße, S. 98.

Diameter (Durchmesser) des Kreises; von einer allgemeinen Vorstellung desselben, nebst deren Gebrauch, S. 23.

—— über dessen Stücke, oder Segmente, und das Gesez dabei, S. 25.

Einheit, deren Hauptvorstellung im Allgemeinen, mittelst einer Formel, S. 15. 18.

Ellipse, die ganze und halbe, wie man deren Flächen berechnet, S. 111. 115.

—— Stücke dieser Flächen, Gesez darüber, S. 118.

—— Vergleichung der Halb-Ellipsen, mit den Flächen unter gedrükt. Bögen, S. 150 - 154.

—— ihre Ordinaten-Gleichung, S. 136.

Entfernungen zu messen, ohne künstliche Instrumente, Art und Weise und Voraussezungen dabei, S. 66 — 71.

Exponent (in Verhältnissen) was damit gemeint sei, S. 8.

Factoren, Wichtigkeit ihrer Aufstellung und Haupt-Ansicht, S. 10.

—— deren Nuzen in der Lehre von Kugel-Abschnitten, S. 102. 112.

Faß, dessen Erzeugung, mittelst einer abgekürzten Ellipse gedenkbar, und darnach zu berechnen, S. 119. 120.

Formeln, in Buchstaben, was man sich dabei zu denken habe, S. 21.
— sie correspondiren geometrischen Linien, S. 22.
— ihr großer Vortheil bei Beweisen, S. 54. 56. 134. 149.
— Uebung in Umbildung der Formeln wird empfohlen, S. 14. 110.

Gewölbe, deren verschiedene Gattungen, S. 122.
— Berechnung ihres Cubik-Innhalts, S. 124. 132.

Gleichung des Kreises, (Ordinaten-Gleichung) Erklärung, und allgemeine Vorstellung derselben, S. 23. 108. 133.
— des Kreises, in Beziehung auf Chorden, S. 134. 135.
— der Ellipse (Ordinaten-Gleichung) S. 120.
— der Paraboliſchen Linie, S. 140.

Halbmesser (Radius) im Zirkel, wie man ihn durch Schlüsse findet, wenn die unmittelb. Messung nicht wohl angeht, S. 79. 116.

Halbirung der Fläche eines Dreieck, durch Parallelen mit der Grundlinie, wann solche nicht ganz von statten gehe, S. 38.

Innhalt eines Dreiecks, allgemeine Formel dazu, und deren Benützung, S. 53.

— des Trapezions, eben so S. 45. 50.
— des Kreises, (Zirkelfläche) S. 77. 80.
— der Fläche unter ein. Halb=Ellipse, S. 112.
Irrational=Größen, Rechnung mit denselben, S 29 40.
Klafter (Cubik=Klafter), deren Größe und Berechnung, S. 94.
Kreis und Halbkreis, Prüfung, ob einer wirklich vorhanden sei, S. 134.
Kugel, deren Oberfläche, und die Berechn. derselben, S. 102.
— ihr Cubik=Innhalt, S. 101. 102.
Kugel=Abschnitte, dessen Oberfläche, (Formel dazu) S. 109.
— deren Cub. Innhalt; Berechnung auf verschiedenen Wegen, S. 104 — 109.
Länge der Kreisbögen, Art sie zu berechnen, S. 76.
Logarithmen, über die Vortheile, mit ihnen zu rechnen, S. 85.
— einige, besonders brauchbare, einzeln angeführt, S. 86. (Man merke hiebei nahmentlich den Log. 3,14 = 0,4969296; u. sehe bei dieser Zal in die Errata.)
Minuten, an Graden angehängt, wie solche in Decimalen ausgedrükt werden, S. 12.
Mittel=Proportionale zwischen 2 Linien, als Segmenten eines Kreis=Diameters, allgemeine Vorstellung, S. 25.

— — wie sie bei Betrachtungen über die Ellipse vorkommt, S 116.

Nachhülfe bei ungenauen Rechnungen, wie man sie anbringt, S. 84.

Näherung der Grössen, besonders durch Decimalen, wie man sie führt, auch von den Vortheilen des Verfahrens dabei, S. 29. 41.

Näherungs-Zahlen bleiben immer von bestimmten verschieden, S. 39.

Ober-Flächen Berechnung. Siehe Kugel.

Ordnung in Stellung der Glieder, S. 9. 22. 51. 128.

Ordinaten-Gleichung im Kreis, S. 135.

— — der Ellipse, S. 136.

Oval, anstatt Ellipse, im Sprachgebrauch üblich, in wieferne der Ausdruk unrichtig sei, S. 111.

Parabolische Linie (Curve) über die Ordinaten-Gleichung derselben einiges, S. 140.

— — auch die Quadratur der Fläche unter dieser Curve, S. 141.

Parallelen, mit der Basis eines Dreiecks gezogen, wie die dadurch bestimmten Flächen berechnet werden, S. 38 — 40.

Pestalozzis Zahlen-Lehre, und Sprache dabei, wird bei Anlaß einer Buchstaben-Formel erläutert, S. 17.

Proportion, was man so nennt, S. 8.

Quadratur des Zirkels, Wahn darüber, S. 87.

—— (vollständige) der Fläche unter der Parabel, S. 141.

Quadrat-Wurzel aus 2, aus 3; wie man der Division ausweiche, wenn diese Größen im Nenner von Brüchen vorkommen, S. 33. 36.

—— aus dem Quotienten $\frac{1}{3,14159}$ S. 79.

—— aus $\frac{1}{2}$, oder $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; Einmal = eins dieser Größe, S. 34.

Qu. Wurzeln, (einzelne) aus $\frac{1}{5}$; aus $\frac{3}{2}$; $1\frac{4}{5}$ S. 41. 61. 62. 63.

—— aus 24; 52; 300; 10,24; 12,00, und 13,44 S. 66. 108. 117. 137.

Radius. Siehe Halbmesser.

Regel de Tri, Erforderniß der bestimmten Säze dabei, S. 6 — 10.

Rechteck, aus 2 Stücken des Kr. Diameters errichtet, welchem Viereck dessen Fläche immer gleich sei, S. 138.

Rechter Winkel in Dreiecken; Gleichung der Linien gegenüber, S. 60. 91.

—— Abweichung davon; Folgen S. 63. Vergl. S. 68.

—— Annahme des rechten W. in dem Dreieck unter der Haupt-Linie bei den Fig. mit gedrükten Bögen, S. 152. 154.

Schacht-Schuh, was man so nennt, S. 94. (Siehe dabei besonders in die Errata)

Sehnen, als Linien gleichschenklichter Dreiecke betrachtet, und Verfolg dieser Ansicht, S. 61. 67. S. auch Chorde.

Sehnen=Gleichungen (zwei) davon; siehe am Schluß den Nachtrag.

Streifen (gekrümmte) wie man sie berechnet, S. 125. 132.

Strebmauer, Dicke derselben, verschieden von der Dicke oben am Schluß=Stein. Davon S. 122. 127.

Tangenten, etwas von ihrer Anwendung, S. 46.

Theilung der Dreiecke durch Parallelen mit der Basis, S. 37.

—— Ausführung, wenn ein bestimmtes Ruthenmaas vorgeschrieben ist, ab= oder zuzumessen, S. 45—47.

Trapezion, Formel dazu, S. 45. 50.

—— wie man Theile derselben (Flächen=Stücke) mißt und berechnet, S. 44—50. 57.

Umfang des Kreises; mit gespanntem Faden gemessen, und Vergleichung dieser Länge mit dem Diameter, S. 76. 78. 85

—— in ihm (in der Peripherie) liegende Punkte, bestimmt zu finden; was dazu gehört, S. 70. 72. 75.

Umfänge zweier Kreise, oder Stücke davon; Verhalten gegen einander; auch in Vergleichung mit Sehnen, S. 81. 86. 88.

Veränderliche Größen im Gegensaz mit beständigen betrachtet, S. 24. 136.

Verhältnis-Zahlen in der Kreis-Rechnung; die genauen und ungenauen, S. 80—88.
—— bei den Ungenauen, wie sich nachhelfen lasse, S. 81.
Vortheile (im Rechnen) einzelne in besondern Fällen, S. 33. 52. 84. 97. 149.
Versuche (empirische) wie und man sich damit hilft, S. 52. 147.
Winkel am Auge, wie man dessen Größe findet, S. 65. 74.
—— der W. von 60 Gr. im gleichseit. Dreieck. Davon S. 144.
—— Aufnahme mit Instrumenten; Mißlichkeit dabei, S. 47.
Zirkel-Rechnung; vielerlei davon, S. 76-86.
—— S. auch Verhältnis-Zahlen im Kreis.
Zolle; Quadrat-Zolle, wie sie in Decimalen dargestellt werden, S. 71.
—— Cubik-Zolle; (gleichmäßig erläutert) S. 96.

Drukfehler.

S. 1. Lin. 7. (von unten) lies: der ganze Bruch
— 3. — 12. statt $\frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 3}$ lies: $\frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 7}$
— 5. — 17. statt $\frac{5}{19}$ lies $\frac{4}{19}$
— 8. — 18 statt $\frac{6}{28}$ lies $\frac{63}{28}$
— 11. — 9. statt 39 lies $\frac{32}{3}$
— 17. — 5. ist zu lesen: 12 dreimal $(\frac{1}{3})$ mal
— 30. — 2. statt 1000 lies 100
— 57. — 7. in der Note statt $2\frac{5}{2}$ lies $2\frac{5}{3}$
— 60. — 2 u. 3. statt CD lies CD^2
— 66. — 4. statt $\frac{AD}{DE}$ lies $\frac{AD}{AE}$
— 78. — 14. statt $\frac{AD^3}{AE}$ lies $\frac{AD^3}{AE^2}$
— 80. — 7. von unten lies (7,639 ..) . ($\sqrt{2}$)
— 81 gegen den Ausgang in §. 6. lies 78,5398.
— 82. Lin. 5. lies 112,838.
— 86. — 3 (von unten) statt 0,4969696
lies 0,4969296.
— 94. — 7. in d. Note statt 1 Schuh lang u. breit
lies 10 Schuh lang u. breit
— 101. — 9. statt GHVM lies GHVW
20. Eben so.
— 102. allerlezte Lin. statt DM^2 lies DM^3
— 109. Lin. 17. statt (314) . 5 . lies (3,14) . 4. 5.
— 117. in der Note Lin. 6. statt 2 . 300
lies 2 . $\sqrt{}$ (300)
— 122 Lin. 7. statt 25,137 lies 25,1327 . (welches auch auf die Subtraction S. 123. (unten) Einfluß hat)
— 128. Lin. 15. statt 16,952 . . schärfer 16,9516
— 137. — 7. Hier fehlt das Zeichen = vor der Zal 12,00.
— 159. Unter Chorde und Quadr. der Chorde ist statt S. 136 zu lesen S. 134.

Nachtrag zu S. 53.

Die Größe VZ = 8,1. kommt zum Vorschein:

SH : SM = AB : VZ

$$14 : 11{,}34 = 10 : \left(\frac{113{,}4}{14}\right) = 8{,}1.$$

Das 2te Glied SM ist = SH — VT
das ist = (14 — 2,66)
womit eben 11,34 sich zeigt. (Alles der Fig. IV gem.)

Zu S. 77. (In der Mitte)

Hier ist mit der Verhältnis-Zal 3,1416, nicht mit 3,14159 multiplicirt worden; daher gieng die Zal 183,347 hervor, welche sonst nur 183,346 heissen sollte. Die Zal 3,1416 giebt immer viel mehr Genauigkeit als 314. Doch ist die Rechnung aus 113 : 355 geführt, oder aus 1 : 3,1415926, schärfer.

Zu S. 134 u. 135.

Es giebt eigentlich 2 Chorden-Gleichungen im Kreis; nicht blos eine. Die erste ist nach Fig. V.

$$AB^2 = AD \,.\, AG$$

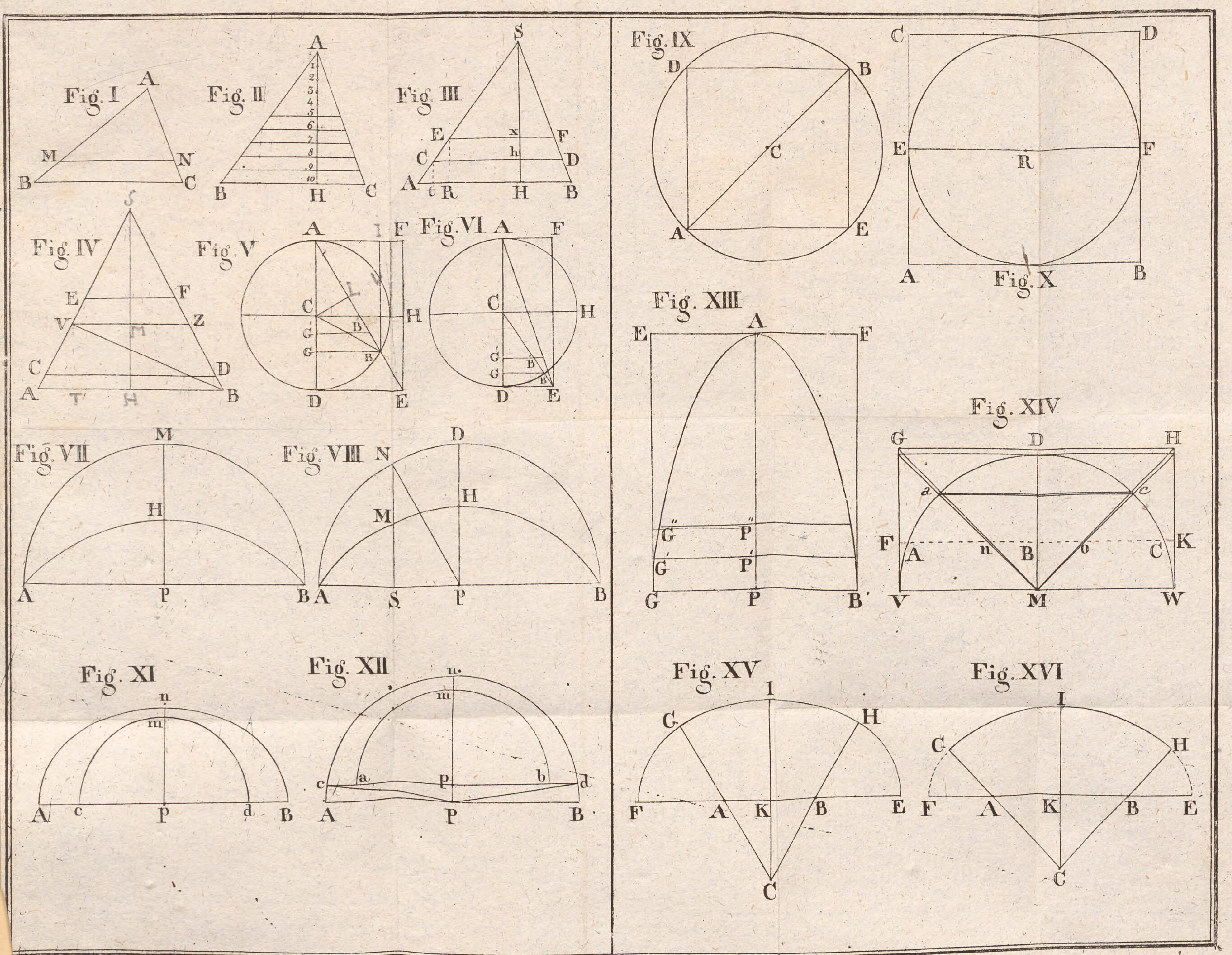
oder $DB^2 = AD \,.\, DG$

Die zweite aber heißt (nach ebend. Figur)

$$BV = \frac{(AB + DB) \,.\, (AB - DB)}{AD}$$

Offenbar ist BV blos durch die 3 Seiten des Dreiecks ABD ausgedrükt, deren gröste der Kreisdiater allemal selbst ist. Diese Chorde steht jederzeit in der Mitte zwischen 2 gleichen Linien wie DB u. AV in dieser Figur sind; DB ist = AV in jedem Fall.

Von dem Ausdruck dieser Chorde BV, und von der Benüzung desselben kommt in sehr wenigen Lehrbüchern etwas vor. Es lassen sich aber recht fruchtbare Folgerungen daraus ziehen.



Zu Schübler's Belehr. für Geom.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Schübler, Christian Ludwig,

Belehrungen in Geometrie zur Nachhilfe für Praktiker in Feld- und Bau-Messungen bestimmt

Stuttgart 1813

Math.p. 512
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082779-4